

Math. P.

73^v

D. 3. D. 16.

Math. P. 73 ^v

Chodníček

DIE
GRUNDZÜGE
DER
COMBINATIONEN
UND DER
AUS IHNEN ABGELEITETEN
REIHEN UND DETERMINANTEN

VON
JULIUS CHODNÍČEK,
STUDIEN-PRÄFECT IM FÜRST ERZB. SEMINÄR ZU KREMSIER.



KREMSIER.
DRUCK UND VERLAG VON HEINRICH GUSEK.
—
1867.

DIE
GRUNDZÜGE
DER
COMBINATIONS-
UND DER
VERMISCHTEN ARITHMETIK
RECHEN- UND BESTIMMUNGS-
KUNST



KREMSIER
VERLAG UND DRUCK VON JOHANNES GOSCH
1867

Vorwort.

Die vorliegende Schrift enthält in drei Abtheilungen die Entwicklung und erste Gebrauchsanweisung derjenigen Functionen, welche aus der Anwendung der Ordnungszahlen in der Algebra hervorgehen. Es sind diess:

1. *Faktoriell-Reihen,*
2. *Summal- oder Differenzreihen,*
3. *Determinanten-Ausdrücke.*

Zur Uebung und Verdeutlichung sind ganz nahe liegende Beispiele gewählt.

Die Veröffentlichung geschieht in der Absicht, jenen, welche mit dem Inhalte eines Elementarbuches der Algebra vertraut sind, eine ebenso leichte als nützliche Beschäftigung zu bieten, ehe sie zu dem Lehrstoffe der höheren Analysis übergehen.

Kremsier, den 12. Dezember 1866.

Der Verfasser.

Vorwort.

Die vorliegende Schrift enthält in drei Abtheilungen die Entwicklung und erste Gebrauchsanweisung derjenigen Functionen, welche aus der Anwendung der Ordnungszahlen in der Algebra hervorgehen. Es sind dies:

1. Factorial-Reihen.
2. Summen- oder Differenzreihen.
3. Determinanten-Ausdrücke.

Zur Übung und Verdeutlichung sind ganz nahe liegende Beispiele gewählt.

Die Veröffentlichung geschieht in der Absicht, jenen, welche mit dem Inhalte eines Elementarbuches der Algebra vertraut sind, eine ebenso leichte als nützliche Beschäftigung zu bieten, ehe sie zu dem Lehrstoffe der höheren Analysis übergehen.

Kreuzler, den 12. Dezember 1886.

Der Verfasser.

Einleitung.

Zusammengestellte verschiedene Grössen werden zunächst als erster, zweiter, dritter oder jeder andere Bestandtheil eines Gefüges von einander unterschieden. Im Calcul macht man diess durch aufeinanderfolgende Buchstaben des Alphabetes oder dadurch ersichtlich, dass man einem Buchstaben nach und nach die Ordnungszahl, auch Index genannt, beisetzt. Darnach drücken die Reihen $a\ b\ c\ d$ und $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ Gefüge aus vier verschiedenen Bestandtheilen aus. Das Gefüge heisst Complexion, jeder Bestandtheil Element derselben.

Im Zusammenhange bestimmen die Elemente durch ihre Lage unter einander und durch wechselseitige Beziehungen zu einander den Wert der Complexionen, welche aus einer gegebenen Reihe von Grössen gebildet werden können.

Um sich diess durch ein sehr einfaches Beispiel zu veranschaulichen, zerstreue man einige mit Ziffern (1, 2, 3, 4, 5) bezeichnete Zettel und lege sie dann auf's Geradewol wählend wieder zusammen. Im allgemeinen werden die Ziffern oftmals wieder eine neue Reihenfolge geben, wie

1. 2. 3. 4. 5.

2. 5. 1. 4. 3.

1. 4. 3. 2. 5. u. s. w,

Complexionen von verschiedenem Werte erhält man auch dann, wenn man zu wiederholten Malen zwei oder mehrere Ziffern wält und daraus entweder Ziffersummen oder mehrziffrige Zahlen herleitet.

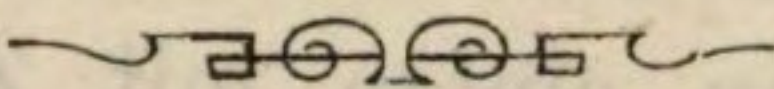
Wenn gegebene Elemente bloss ihre Stellung unter einander ändern, so sagt man: sie permutiren.

Einführung.

Wo die Elemente zu je zwei oder mehreren in eine Verbindung treten, da gehen sie Combinationen ein.

Wenn die Combinationen dadurch ihren Wert ändern, dass die Elemente derselben eine andere Folge annehmen, so sagt man: sie variiren.

Klarer wird das Wesen und die Anwendbarkeit dieser Operationen im Folgenden.



1. 2. 3. 4. 5.

2. 3. 4. 5. 1.

1. 4. 3. 2. 5. u. s. w.

Complexionen von verschiedenen Werten erhält man auch dann, wenn man zu wiederholten Malen zwei oder mehrere Nüßern wählt und daraus entweder Nüßernnamen oder mehrstellige Zahlen herleitet.

Wenn gegebene Elemente bloss ihre Stellung unter einander ändern, so sagt man: sie permutiren.

I. Abtheilung.

Permutationen.

Darstellung derselben.

1) Die Aenderung in der Reihenfolge der Elemente ist so-
gleich möglich, wenn zu einem Element a_1 ein zweites a_2 hinzu-
tritt, denn dieses kann dem ersten vorangehen oder folgen. Aus
der Zusammenstellung $a_2 a_1$ wird durch Permutation: $a_1 a_2$.

2) Kommen neben diesen zwei Elementen noch andere vor,
so hat die ganze Complexion eine theilweise Permutation erlitten, wie:

$$a_4 a_3 a_2 a_1 \text{ und } a_4 a_3 a_1 a_2$$

Zur vollständigen Durchführung wird dann natürlich erfor-
dert, dass auch an die Stelle des dritten, vierten u. j. a. Elemen-
tes die folgenden gesetzt werden. Dabei lässt sich bemerken, dass
jede neue drei, vier, fünf, u. mehrstellige Complexion durch sich
selbst eine andere mit nächst niedrigerer Stellenanzahl entstehen
lässt, deren eigene Aenderung die Lücken ausfüllt, welche entstehen,
wenn man nur an die Stelle des höchstbezeichneten Elementes
die folgenden setzt. Geht man also zunächst zu den dreistelligen
Complexionen über, so hat man, nachdem $a_3 a_2 a_1$ in $a_3 a_1 a_2$
übergangen ist, an die Stelle von a_3 die folgenden Elemente a_2
und a_1 zu setzen. Man erhält $a_2 a_3 a_1$ und $a_1 a_3 a_2$. In diesen
zwei Complexionen sind aber auch wieder neue entstanden, näm-
lich $a_3 a_1$ und $a_3 a_2$, welche bei eigener Aenderung in $a_1 a_3$ und
 $a_2 a_3$ die Lücken ausfüllen. Drei Elemente geben somit folgende
Permutationen:

$$a_3 a_2 a_1$$

$$a_2 a_3 a_1$$

$$a_1 a_3 a_2$$

$$a_3 a_1 a_2$$

$$a_2 a_1 a_3$$

$$a_1 a_2 a_3$$

3) Bei einer vierstelligen Complexion wie $a_4 a_3 a_2 a_1$ hätte man auf diese Art zuvörderst folgende vier Aenderungen:

$$a_4 a_3 a_2 a_1$$

$$a_3 a_4 a_2 a_1$$

$$a_2 a_4 a_3 a_1$$

$$a_1 a_4 a_3 a_2$$

Aber in jeder derselben kommt eine dreistellige Complexion vor, welche, wie oben angegeben wurde, ihre eigene Permutation zulässt und dadurch eine Zwischenreihe von Complexionen herstellt. Die sämtlichen verschiedenen Stellungen von vier Elementen sind demnach:

$$a_4 a_3 a_2 a_1$$

$$a_3 a_4 a_1 a_2$$

$$a_2 a_4 a_3 a_1$$

$$a_1 a_4 a_3 a_2$$

$$a_4 a_3 a_1 a_2$$

$$a_3 a_4 a_2 a_1$$

$$a_2 a_4 a_1 a_3$$

$$a_1 a_4 a_2 a_3$$

$$a_4 a_2 a_3 a_1$$

$$a_3 a_2 a_4 a_1$$

$$a_2 a_3 a_4 a_1$$

$$a_1 a_3 a_4 a_2$$

$$a_4 a_2 a_1 a_3$$

$$a_3 a_2 a_1 a_4$$

$$a_2 a_3 a_1 a_4$$

$$a_1 a_3 a_2 a_4$$

$$a_4 a_1 a_3 a_2$$

$$a_3 a_1 a_4 a_2$$

$$a_2 a_1 a_4 a_3$$

$$a_1 a_2 a_4 a_3$$

$$a_4 a_1 a_2 a_3$$

$$a_3 a_1 a_2 a_4$$

$$a_2 a_1 a_3 a_4$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4$$

Ebenso bleibt bei einer fünfstelligen Complexion das fünfte Element so lang am ersten Platze, bis die vier anderen permutirt sind, worauf dessen Stelle nach und nach ein folgendes einnimmt, während immer wieder die vier anderen ihre Plätze vollständig vertauschen.

4) Im Allgemeinen ergibt sich also für die Permutation beliebig vieler Elemente folgendes:

Die durch das Permutiren entstehenden Complexionen bilden Gruppen, in welchen wiederholt zwei, dann drei, vier u. m. Elemente ihre gegenseitige Lage ändern.

Jedesmal bleiben die vorhergehenden Elemente so lange ungeändert, bis die nachfolgenden vollständig permutirt sind. Darauf tritt das letztvorhergehende Element seine Stelle nach und nach den folgenden ab und bildet mit den übrigen eine neue Partial-Complexion, welche für sich permutirt wird. Man kann diess an folgendem Beispiel nochmals sehen:

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c b d	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d b c	b d a c	c d a b	d c a b
a d c b	b d c a	c d b a	d c b a.

Die Gruppe der für eine bestimmte Anzahl von Elementen geltenden Permutationen ist abgeschlossen, wenn die Elemente in verkehrter Ordnung zur ersten Complexion stehen. Würde man die Operation über diese Grenze hinaus fortführen, so würden die Complexionen in verkehrter Ordnung auf ihre ursprüngliche Stellung zurückgeführt werden, wie etwa:

abc, acb, bac, bca, cab, cba, cab, bca, bac, acb, abc.

5) Auf die hier beschriebene Weise erhält man nicht bloss alle möglichen Permutationen, sondern es sind auch diese letzteren im Sinne des Zusammenhanges der zuerst angesetzten Elemente geordnet. Hätte man z. B. vier Ziffern gewält, um daraus alle möglichen vierziffrigen Zahlen zu bilden, so bestände der Zusammenhang darin, dass jede links stehende Ziffer den Stellenwert der Nachbarziffer zehnmal nimmt. Ordnet man dann die Ziffern selbst fallend, so erhält man die grösste vierziffrige Zahl; permu- tirt man dieselben, so kommen alle möglichen vierziffrigen Zahlen, die aus den gegebenen Ziffern gebildet werden können, zum Vor- schein; befolgt man dabei die angegebene Regel, so werden auch die erhaltenen vierziffrigen Zahlen fallend geordnet sein. Das an- gedeutete Beispiel würde also derartig anfangen:

5 3 2 1

5 3 1 2

5 2 3 1 u. s. w. in gewöhnlicher, und

5. $10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$.

5. $10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2$ u. s. w. oder

5. $x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$

5. $x^3 + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 2$ u. s. w. in allgemeiner

Schreibweise ausgedrückt.

Beispiel 2. Die Arme eines Wagbalkens seien in gleiche Theile getheilt und in den Theilungspunkten des einen Armes Gewichte von 1, 2 und 3 $\mathcal{A}$ Schwere aufgehängt. Es fragt sich,

welche Gewichte am andern Arm in dem ersten Theilungspunkte angebracht werden müssen, um Gleichgewicht herzustellen, wenn jene ersteren ihre Ordnung ändern?

Bekanntlich müssen die Summen der Producte aus den Gewichten und Entfernungen vom Stützpunkte auf beiden Seiten des Wagbalkens gleich sein, wenn Gleichgewicht herrschen soll.

Die Aufgabe wird also nach folgendem Schema gelöst:

$$x_1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 \text{ } \mathcal{E}$$

$$x_2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 13 \text{ } \mathcal{E}$$

$$x_3 \cdot 1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 13 \text{ } \mathcal{E} \text{ u. s. w.,}$$

wobei die erste Zahl die Entfernung, die zweite das Gewicht angiebt. Welches Problem beantworten die angesetzten Gleichungen, wenn x an die zweite Stelle gesetzt wird?

Beispiel 3. Vier Tischgenossen kommen überein, ihre Plätze so zu wechseln, dass jeder an jedem Tage einen andern Platz einnimmt, wobei zur Einnahme des ersten Platzes nach und nach die Altersordnung berechtigt. Wie kann dieses durchgeführt werden?

Da die Aufgabe fordert, dass nicht nur die Complexionen im Ganzen, sondern auch die Plätze der Elemente im Einzelnen verschieden sein sollen, so ist offenbar aus jeder Gruppe nur eine Complexion zu nehmen, die mit Bezug auf die schon vorgeordneten Complexionen kein gleichnamiges Element auf einer gleichnamigen Stelle enthält.

Man erhält mehrfache Lösungen wie:

1) a b c d	2) a b c d	3) a b c d	4) a b c d
b a d c	b c d a	b d a c	b a d c
c d a b	c d a b	c a d b	c d b a
d c b a	d a b c	d c b a	d c a b

Die Elemente sind hier symmetrisch geordnet und die Anordnung tritt am deutlichsten in N. 2. auf, wo sie gleichsam im Kreise herumgehen und die Bedingung enthalten ist, dass alle möglichst gleichmässig vorrücken.

Zahl der Permutationen.

6) Die Anzahl der verschiedenen Stellungen, welche bei n Elementen möglich ist, wird gewöhnlich durch das Symbol $n!$

ausgedrückt. Nach dem Vorhergehenden ist es leicht, diesen Ausdruck algebraisch zu analysiren. Aus (3) und (4) ist klar, dass jede vollständige Permutation so viel Gruppen darstellt, als Elemente sind, während in jeder Gruppe die nebst dem ersten Elemente vorkommenden $(n-1)$ übrigen für sich vollständig permutiren. Es ist daher zunächst:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Aber man hat aus demselben Grunde auch:

$$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2)! \text{ ferner:}$$

$$(n-2)! = (n-2)(n-3)!$$

$$(n-3)! = (n-3)(n-4)! \text{ und so fort bis auf}$$

$$\dots\dots (n-(n-2)) (n-(n-1))! \text{ oder}$$

$$\dots\dots (n-n+2) (n-n+1)! \text{ d. h.}$$

$$2 \cdot 1.$$

Durch die ausgeführte Substitution gelangt man zu dem Ausdruck:

$$n! = n (n-1) (n-2) (n-3) \dots\dots\dots 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (A)$$

d. h. *Die Permutationszahl wird gefunden, wenn man alle natürlich geordneten Zahlen von 1 bis zur Anzahl der gegebenen Elemente (n) multiplicirt.*

Man nennt das Product (natürlich) geordneter Zahlen auch kurz Faktoriell. *Die Permutationszahl gegebener Elemente ist somit dem Faktoriell der Elementenanzahl gleich.*

7) Berechnet man die Formel (A) nach und nach für $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ u. s. w., so erhält man das System der Permutationszahlen.

$$\text{Es ist: } 1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ etc.}$$

In das Bereich derselben fällt die Lösung folgender Aufgaben:

- a) Wie viel sechsziffrige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 8 aufschreiben?

$$\text{Gelöst: } 6! = 720$$

- b) Wenn in ein Fach eines Bücherschranks 13 verschiedene Werke gestellt werden sollen, wie viel Reihenfolgen sind möglich, aus denen Eine gewählt werden kann?

$$\text{Gelöst: } 6.227, 020800.$$

- c) Die Faktoren 2. 3. 5. 7. 9 geben in jeder Ordnung multiplicirt dasselbe Product. Wie oft müsste man die Rechnung ausführen, um es durch den Versuch zu beweisen?
- d) Welches ist die mathematische Wahrscheinlichkeit (d. h. das Verhältniss des Zutreffenden zu dem überhaupt Möglichen), dass jemand acht Elemente genau in der Ordnung zusammenstellt, wie sie ein zweiter denkt?

Theilung der Permutationen.

8) Wenn man in permutirenden Complexionen einige Elemente absondert, so erscheinen sie während des Permutirens:

1. verschieden eingereiht;
2. in jeder Einreihung verschieden gestellt, während die übrigen Elemente constant bleiben;
3. in ihrer jedesmaligen Stellung so oft wiederholt, als Aenderungen in der Stellung der übrigen angereihten Elemente zulässig sind.

Die Richtigkeit dieser Punkte findet man sehr leicht in den unter (3) und (4) dargestellten Permutationen bestätigt, wenn man etwa die Elemente a_4 , a_3 oder a b im Verlaufe des Permutirens absondert. Man erhält dieselben

1. auf sechsfach verschiedene Weise eingereiht und zwar entweder an erster und zweiter, erster und dritter, erster und vierter, zweiter und dritter, zweiter und vierter oder dritter und vierter Stelle.

2. Auf jeder Stelle permutirt, während c und d constant sind.

3. Auf jeder Stelle constant, während c und d permutiren.

Daraus folgt aber, dass auch *die Permutationszahl einer jeden Anzahl von Elementen gleich dem Producte aus der Permutationszahl eines Bruchtheiles der Complexion in die Anzahl der verschiedenen Einreihungen ihrer und der verschiedenen Stellungen der übrigen Elemente ist.*

Nennt man n die volle, a die herausgehobene Anzahl der Elemente, e die Zahl der möglichen Einreihungen, so ist dem Gesagten zufolge

$$n! = (n-a)! \cdot e \cdot a! \dots (B.)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$e = \frac{n!}{a! (n-a)!} \dots (C.)$$

d. h. Die Zahl der verschiedenen Einreihungen eines Theiles der Elemente in den Stellen einer Complexion wird gefunden, wenn man die Permutationszahl aller Elemente durch das Product der Permutationszahlen der herausgehobenen und übrigen Elemente dividirt.

9) Natürlich bietet sich eine Absonderung der Elemente dar, wenn in den Complexionen eine oder mehrere Grössen wiederholt vorkommen, wie z. B. in $aaa\ bcc$.

Da aber dadurch, dass ein Element wiederholt auf andere Stellen gesetzt wird, keine Permutation zu Stande kommt, so wird jedesmal, wenn in einer Complexion gleiche Elemente vorkommen, die Vervielfältigung der Permutationen durch das Faktoriell der gleichen Elemente unterbleiben.

Für einen solchen Fall wird die Gleichung

$$n! = (n-a)! \cdot e \cdot a! \dots$$

eingerrichtet, wenn man beiderseits mit $a!$ dividirt. Es ist

$$\frac{n!}{a!} = (n-a)! \cdot e = p \dots (D).$$

d. h. *Die Permutationszahl einer Reihe, in welcher ein Element wiederholt wird, ist gleich dem Faktoriell sämmtlicher Elemente dividirt durch das Faktoriell der Wiederholungen.*

Beispiel 1. Darnach lässt sich die Anzahl der fünfziffrigen Zahlen, welche mit den Ziffern 2 3 4 4 4 geschrieben werden können, folgender Weise angeben:

$$p = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Würde noch ein zweites Element wiederholt angegeben sein, so müssten ganz folgerichtig auch dessen Permutationen, die vorläufig in $(n-a)!$ als $b!$ enthalten sind, auf Eine reducirt oder beide Theile der Gleichung nochmals durch das Faktoriell der zweiten Wiederholung $b!$ dividirt werden.

Beispiel 2. Bei einer Wahl haben 10 Personen dem Alter nach ihre Stimmen abgegeben. Gewählt wurden vier Personen mit sechs, zwei und je einer Stimme. Die mathematische Wahrscheinlichkeit, dass man nachgerade erräth, wie die Stimmen abgegeben wurden, wäre:

$$w = 1 : \frac{10!}{6! \cdot 2!} = 1 : 2520.$$

Faktoriell-Reihen.

10) Wenn man in progressiv geordneten Permutationen mit irgend einem beliebigen Gliede abbricht, so zerlegen sich die vorgeordneten Complexionen in Gruppen, welche neben den ersten, dann neben den zweiten, dritten u. a. Elementen vollständige Permutationen enthalten. Um sich dieses recht anschaulich zu machen, hebe man bei dem in (4) angeführten Beispiele die constanten Elemente etwa bis zur Complexion $b d c a$ heraus, wie folgt:

$$a \left\{ \begin{array}{l} b c d \\ b d c \\ c b d \\ c d b \\ d b c \\ d c b \end{array} \right. \quad b \left\{ \begin{array}{l} a \left\{ \begin{array}{l} c d \\ d c \end{array} \right. \\ c \left\{ \begin{array}{l} a d \\ d a \end{array} \right. \\ d \quad a c \\ . \quad . \quad . \end{array} \right.$$

Darnach lässt sich die Zahl der *vorgeordneten* Complexionen durch eine Reihe ausdrücken, deren Glieder einzeln Producte aus Faktoriellen in fallender Ordnung und den (variant genommenen) Indices derjenigen Elemente darstellen, welche den folgenden nächstniedrigeren Gruppen zuletzt vorgeordnet sind.

Heisst z die Ordnungszahl einer Complexion bei permutirenden n Elementen, so ist $(z-1)$ die Zahl der vorgeordneten Complexionen und die Faktoriell-Reihe hat im Allgemeinen folgende Gestalt:

$$(z-1) = A. (n-1)! + B (n-2)! + C (n-3)! + \dots \quad (E.)$$

Für das angeführte Beispiel würde sie speciell lauten:

$$(z-1) = 1. 3! + 2. 2! + 1. 1! = 11.$$

11) In dieser Reihe (E) ist *jedes Glied grösser als die Summe aller folgenden*, den letztere ist für sich offenbar Ordnungszahl im Bereich einer niederen Permutations-Gruppe und somit kleiner als das nächstvorhergehende Faktoriell, welches der ganzen Gruppe entspricht.

Es ist im Calcul:

$$n! > z \text{ und } > A (n-1)! + B (n-2)! + C (n-3)! + \dots$$

$$(n-1)! > B (n-2)! + C (n-3)! + \dots$$

$$(n-2)! > C (n-3)! + \dots$$

Nun lassen sich für jeden Fall in der allgemeinen Reihe

$$(z-1) = A (n-1)! + B (n-2)! + C (n-3)! + D (n-4)!$$

die Coëfficienten A, B, C, D ... berechnen. Dividirt man nämlich beide Theile durch $(n-1)!$ so erhält man

$$\frac{(z-1)}{(n-1)!} = A + \left(B (n-2)! + C (n-3)! + D (n-4)! \right) : (n-1)!$$

A ist nur ganzzahlig zu nehmen und dann ist

$$\left(B (n-2)! + C (n-3)! + D (n-4)! \right) = r_1$$

Es ist also:

$$\frac{(z-1)}{(n-1)!} = A + r_1 \quad (\alpha)$$

Dividirt man beide Theile der letztgefundenen Gleichung durch $(n-2)!$ so erhält man

$$\frac{r_1}{(n-2)!} = B + \left(C (n-3)! + D (n-4)! \right) : (n-2)!$$

oder kurz:

$$\frac{r_1}{(n-2)!} = B + r_2 \quad (\beta.)$$

Auf gleiche Weise ist

$$\frac{r_2}{(n-3)!} = C + r_3 \text{ u. s. w.} \quad (\gamma.)$$

Aus (α) (β) (γ) ist der Gang der Rechnung ersichtlich, die man in jedem gegebenen Falle auszuführen hat. Wäre z. B. die 17. Complexion von vier Elementen darzustellen, so würde man die Lösung folgender Weise zu verrichten haben:

$$\begin{aligned} (17-1) &= 16 \\ \frac{16}{3!} &= 2 + 4 \\ \frac{4}{2!} &= 2 + 0 \\ \frac{0}{1!} &= 0 \end{aligned}$$

In die 17. Complexion sind also von den vier Elementen zwei dem dritten, von den drei übrigen abermals zwei dem dritten vorgeordnet; worauf die letzten zwei in natürlicher Ordnung folgen. Die Complexion lautet also: $a_2 a_1 a_4 a_3$ (vergl. (3).)

Beispiel 2. Wie folgen 8 Elemente in der 10.000sten Permutation aufeinander?

Lösung:

$$9999 = A \cdot 7! + B \cdot 6! + C \cdot 5! + D \cdot 4! + E \cdot 3! + F \cdot 2! + G \cdot 1$$

$$A = \frac{9999}{5040} = 1 + r_1 = 4959$$

$$B = \frac{4959}{720} = 6 + r_2 = 639$$

$$C = \frac{639}{120} = 5 + r_3 = 39$$

$$D = \frac{39}{24} = 1 + r_4 = 15$$

$$E = \frac{15}{6} = 2 + r_5 = 3$$

$$F = \frac{3}{2} = 1 + r_6 = 1$$

$$G = \frac{1}{1} = 1 + 0$$

Zur Darstellung hat man also nach und nach: das zweite, siebente, sechste, zweite, dritte, zweite, zweite und letzte Element zu nehmen. Die Complexion lautet

$$2. \ 8. \ 7. \ 3. \ 5. \ 4. \ 6. \ 1.$$

Beispiel 3. Wo liegt der Schwerpunkt einer Reihe von sechs Kugeln, die im Gewichte von 1, 2, 3, 4, 5, 6 Pfund, bei einer Entfernung von 6 Zoll von einander, 300mal progressiv ihre Stellung geändert haben?

Lösung:

$$299 = A \cdot 5! + B \cdot 4! + C \cdot 3! + D \cdot 2! + E \cdot 1!$$

$$A = \frac{299}{120} = 2 + r_1 = 59$$

$$B = \frac{59}{24} = 2 + r_2 = 11$$

$$C = \frac{11}{6} = 1 + r_3 = 5$$

$$D = \frac{5}{2} = 2 + r_4 = 1$$

$$E = \frac{1}{1} = 1 + 0$$

In der 300sten Permutation folgen die Kugeln folgendermassen aufeinander:

$$3\overline{a} \ 4\overline{a} \ 2\overline{a} \ 6\overline{a} \ 5\overline{a} \ 1\overline{a}$$

Der Schwerpunkt wird bekanntlich gefunden, wenn man die Gewichte mit den Entfernungen multiplicirt, die Produkte addirt, und die erhaltene Summe durch die Summe der Gewichte dividirt.

Darnach ist:

$$x = \frac{\begin{array}{cccccc} \overline{a} & \overline{a} & \overline{a} & \overline{a} & \overline{a} & \overline{a} \\ 3.0 & + & 4.6 & + & 2.12 & + & 6.18 & + & 5.24 & + & 1.30 \\ \hline \overline{a} & & \overline{a} & & \overline{a} & & \overline{a} & & \overline{a} & & \overline{a} \end{array}}{3 + 4 + 2 + 6 + 5 + 1}$$

$$x = 14 \frac{4}{7} \text{ Zoll.}$$

Beispiel 4. Die wievielte sechsstellige Zahl ist 431265 unter allen jenen, welche mit denselben Ziffern geschrieben werden können?

Nach Angabe der Reihe (E) kann man folgendes Verfahren beobachten:

Man setze die ursprüngliche Reihe (= 123456) an; streiche nach und nach die Ziffern der gegebenen Complexion darin weg und zähle jedesmal, wie viel Ziffern der durchgestrichenen noch vorangehen. Dadurch erhält man die Coefficienten A, B, C, D . . für die Reihe

$$z-1 = A (n-1)! + B (n-2)! + C (n-3)! + \dots$$

Für das gegebene Beispiel ist

$$A = 3, B = 2, C = 0, D = 0, E = 1, F = 0.$$

daher durch Substitution:

$$z-1 = 3. 5! + 2. 4! + 0. 3! + 0. 2! + 1. 1!$$

$z = 410$ die Ordnungszahl der Complexion.

12) Wenn in einer Complexion wiederholte Elemente vorkommen, so tritt nur für jedes verschiedene Element eine niedrigere Permutationsgruppe auf, wie z. B. für $abccdd$ nur

$$a (b c c c d d)$$

$$b (a c c c d d)$$

$$c (a b c c d d)$$

$$d (a b c c c d),$$

wo Kürze halber durch die Klammern vollständige Permutationen nächst niederer Ordnung angezeigt sind.

Iene Gruppen, welchen die nicht wiederholten Elemente vorgehen, sind, wie leicht ersichtlich ist, einander in Bezug auf die Anzahl der Complexionen gleich. Darnach ist

$$p = m \frac{(n-1)!}{\alpha! \beta! \gamma!} + \frac{(n-1)!}{(\alpha-1)! \beta! \gamma!} + \frac{(n-1)!}{\alpha! (\beta-1)! \gamma!} + \frac{(n-1)!}{\alpha! \beta! (\gamma-1)!} \dots (F)$$

13) Jede Zahl, die kleiner als p ist, bestimmt eine Complexion, welche aus der ursprünglichen wie in (11) darzustellen ist, wenn man weiss wie viel Elemente bis dahin Stelle für Stelle vorgeordnet erscheinen sollen. Die Zahl der an erster Stelle vorgeordneten verschiedenen Elemente erfährt man durch die Division der Zahl $z-1$ mit dem Faktor $\frac{(n-1)!}{\alpha! \beta! \gamma!}$ wobei der Quotient natürlich nicht grösser als m genommen werden darf. Bleibt ein grösserer Rest, so giebt die Subtraction des zweiten $\left(\frac{(n-1)!}{(\alpha-1)! \beta! \gamma!} \right)$,

dann des dritten, vierten Gliedes, ob auch das erste, zweite, . . . gleiche Element vorgeordnet zu nehmen ist. Sobald der Rest kleiner als das nächstfolgende Glied gefunden wird, ist die Rechnung für die Anordnung des zweiten Elementes auf gleiche Weise vorzunehmen.

Aufgabe: Wie ist die 300ste Complexion der Elemente $a b c c c d d$ direct darzustellen?

II. Abtheilung.

Combinations und Variationen.

Darstellung derselben.

14) Im Allgemeinen werden Verbindungen eingeleitet, wenn zu einer Grösse eine zweite, zu je zweien eine dritte u. s. w. hinzugefügt wird. Dabei kann entweder jede oder überhaupt nur eine Folge der Grössen zur Geltung gebracht werden. Verbindungen von Grössen in jeder Folge heissen *Variationen*; Vereinigungen

von Grössen mit einer Folge überhaupt werden *Combinations* genannt. Man theilt die Verbindungen in Klassen ein nach der Zahl ihrer Elemente und erhält aus n Elementen.

- α) Variationen zweiter Klasse, wenn jedes einzelne Element mit jedem anderen (vorhergehenden und nachfolgenden) verbunden wird. z. B. aus $a\ b\ c\ d$

$a\ b,$ $a\ c,$ $a\ d$
 $b\ a,$ $b\ c,$ $b\ d$
 $c\ a,$ $c\ b,$ $c\ d$
 $d\ a,$ $d\ b,$ $d\ c.$

- β) Combinationen zweiter Klasse, wenn sich zu jedem einzelnen Element jedes folgende gesellt. z. B.

$a\ b,$ $a\ c,$ $a\ d$
 $b\ c,$ $b\ d$
 $c\ d.$

- γ) Variationen und Combinationen dritter Klasse, wenn jede Variation zweiter Klasse mit allen anderen, und jede Combination zweiter Klasse mit jedem folgenden Elemente verbunden wird.

z. B.

V.

C.

$a\ b\ c$	$a\ b\ d$	$c\ a\ b$	$c\ a\ d$	$a\ b\ c$	$a\ b\ d$
$a\ c\ b$	$a\ c\ d$	$c\ b\ a$	$c\ b\ d$		$a\ c\ d$
$a\ d\ b$	$a\ d\ c$	$c\ d\ a$	$c\ d\ b$		
$b\ a\ c$	$b\ a\ d$	$d\ a\ b$	$d\ a\ c$		$b\ c\ d.$
$b\ c\ a$	$b\ c\ d$	$d\ b\ a$	$d\ b\ c$		
$b\ d\ a$	$b\ d\ c$	$d\ c\ a$	$d\ c\ b.$		

Ueberhaupt gehen die Variationen und Combinationen jeder höheren Klasse aus den nächst niedrigeren Verbindungen durch Hinzufügung der anderen oder bloss folgenden Elemente hervor. Dabei sind die Complexionen im Sinne der Elementen-Reihe geordnet.

Die Variationen sind, wie gesagt, Verbindungen in jeder Elementenfolge, somit permutirte Combinationen.

Zahl der Verbindungen.

- 15) Aus der Art, wie die Variationen und Combinationen gebildet werden, lässt sich die Formel zur Berechnung, wie viele

solcher Verbindungen aus mehreren Elementen möglich sind, direct ableiten. Kürzshalber bezeichne man bei n Elementen die

Zahl der Variationen erster Klasse mit	V_n^1
„ „ zweiter „ „	V_n^2
„ „ dritter „ „	V_n^3
„ „ r-ter „ „	V_n^r

Nach dem Bildungsgesetze kommt in den höheren Variationen jede niedere so oftmal vor, als ausser derselben Elemente erübrigen. Man findet also die Zahl der höheren Variationen, wenn man diejenige der nächst niedrigeren mit der Restanzahl der Elemente multiplicirt. Es ist also in kurzer Bezeichnung:

$$\begin{aligned} V_n^2 &= V_n^1 (n-1) \\ V_n^3 &= V_n^2 (n-2) \\ V_n^4 &= V_n^3 (n-3) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Da nun die Variationen erster Klasse blosse Elemente sind und daher ihre Zahl n ist, so hat man durch Substitution:

$$\begin{aligned} V_n^2 &= n (n-1) \\ V_n^3 &= n (n-1) (n-2) \\ V_n^4 &= n (n-1) (n-2) (n-3) \text{ u. s. w.} \dots (G) \end{aligned}$$

Die Zahl der Variationen einer bestimmten Klasse ist das Product so vieler höchster Ordnungszahlen der Elemente, als die Klasse Stellen hat.

16) Als Combinationen erster Klasse gedacht heissen die Elemente Unionen. Je zwei zusammen geben eine Ambe, je drei oder vier eine Terne und Quaterne. Man bezeichnet sie der Reihe nach mit $C_n^1, C_n^2, C_n^3 \dots C_n^r$. Jede einzelne Combination geht durch das Permutiren ihrer Elemente in Variationen über. Multiplicirt man daher die Zahl der ersteren mit dem Faktoriell

ihrer Stellen, so erhält man die Zahl der letzteren. Diess gibt folgende Gleichungen:

$$C_n^1 \cdot 1! = V_n^1$$

$$C_n^2 \cdot 2! = V_n^2$$

$$C_n^r \cdot r! = V_n^r, \text{ welche auch so geschrieben werden können:}$$

$$C_n^1 \cdot 1! = n$$

$$C_n^2 \cdot 2! = n(n-1)$$

$$C_n^3 \cdot 3! = n(n-1)(n-2) \text{ u. s. w.}$$

Befreit man den ersten Theil der Gleichungen vom Faktoriell, so erübrigt

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ u. s. f. . . . (H)}$$

Die Zahl der Combinationen einer bestimmten Klasse ist der Quotient aus den Producten so vieler höchster und niedrigster Ordnungszahlen der Elemente, als die Klasse Stellen hat.

Anwendung.

α) In einer Schule sollen für die Lehrstunden eines bestimmten Tages aus 9 verschiedenen Gegenständen fünf gewählt und vertheilt werden. Wie oft kann:

1. eine andere Wahl für den Tag,
2. zugleich auch eine andere Anordnung in der Reihenfolge getroffen werden?

Lösung. Die erste Frage bezieht sich auf die Zahl der Combinationen und diese ist:

$$C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126.$$

Die zweite auf die Zahl der Variationen:

$$V_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$$

β) Je zwei Gerade können sich nur in einem Punkte schneiden; wie viel Durchschnittspunkte geben sechs Gerade höchstens?

Lösung: $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$

γ) Drei gegen einander geneigte Ebenen bilden ein Körper-eck, wie viel Ecken kommen im Allgemeinen in einem Raum vor, in welchem sich 12 Ebenen wechselseitig schneiden?

δ) In den Rechnungen mit Progressionen erster Ordnung kommen fünf von einander abhängige Grössen vor, und es können jedesmal, wenn drei davon bekannt sind, die beiden anderen gefunden werden, wie viel Auflösungsfälle bieten sich dabei dar?

17) Die bisher behandelten Verbindungen gehen aus einer Reihe verschiedener Elemente hervor. Es gibt ausser ihnen noch andere, welche durch Combination und Variation in wiederholten Reihen erzeugt werden. Es sind diess:

α) Combinationen zweiter Klasse mit Wiederhohlung, welche entstehen, wenn in einer Doppelreihe jedes Element mit seinem gleichnamigen und jedem folgenden verbunden wird. Die Würfe mit zwei Würfeln geben ein Beispiel davon. Man hat aus der doppelten Reihe Augen

1, 2, 3, 4, 5, 6

1, 2, 3, 4, 5, 6

die Combinationen mit Wiederhohlung:

1. 1 1. 2 1. 3 1. 4 1. 5 1. 6

2. 2 2. 3 2. 4 2. 5 2. 6

3. 3 3. 4 3. 5 3. 6

4. 4 4. 5 4. 6

5. 5 5. 6

6. 6

β) Variationen zweiter Klasse m. W., wenn in einer Doppelreihe jedes Element der zweiten mit jedem Elemente der ersten Reihe verbunden wird. Aus einer Doppelreihe arabischer Ziffern lassen sich so sämtliche zweiziffrige Zahlen durch Variation ansetzen. Man hat aus:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

die Variationen

11, 12, 13, 14, 15, 16
 21, 22, 23, 24, 25, 26
 31, 32, 33, 34, 35, 36 u. s. w.

γ) Durch Verfolgung des Gesetzes in der Art, dass man jede niedrigere Klasse nach den letzten Elementen ihrer Complexionen unter eine neue Reihe anordnet, wie z. B.

1 . 2 . 3 . 4 . . .
 11 12 13 14 . . .
 22 23 24 . . .
 33 34 . . .
 44 . . . ,

erhält man durch Verbindung jeder Complexion mit dem gleichnamigen und den folgenden Elementen die Combinationen, durch Verbindung mit jedem Elemente der neuen Reihe die Variationen nächst höherer Klasse.

Auch hier sind die Variationen bloss permutirte Combinationen.

Zahl der Verbindungen aus wiederholten Reihen.

18) Ein Blick auf die aus n Elementen wirklich dargestellten Amben ohne Wiederholung (14) zeigt, dass ihre Anzahl eigentlich die Summe der natürlichen Zahlen bis $(n-1)$ ist. Man kann dieses durch das Symbol $\sum_0^{n-1} x$ ausdrücken, wobei 0 und $(n-1)$ die Grenzen angeben, zwischen denen für (x) Zahl für Zahl substituirt und sumirt wird. So ist beispielsweise

$$\sum_0^6 x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Nun ist $\sum_0^{n-1} x = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = C_n^2$ (16), wobei $(n-1)$ die erste Ambenreihe in sich enthält. Es ist aus (17) evident, dass auch die Zahl der Amben mit Wiederholung durch Summirung der natürlichen Zahlen gefunden werden kann. Man hat dabei nur die volle Anzahl der Elemente (m) als obere Grenze anzusetzen, da die erste Ambenreihe so viel Complexionen als Elemente enthält.

Dann ist wegen $(n-1) = m$ auch $n = (m + 1)$ zu setzen und

$$\sum_0^m x = \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} = C_m^{w.2} \dots (J)$$

Die Anzahl der Amben mit Wiederholung ist das halbe Product der vollen und ersten höheren Elementenanzahl.

Auf gleiche Weise kann man die Anzahl der Ternen ohne Wiederholung als Summe der Summen aus den natürlichen Zahlen bis zur Grenze der ersten Ternenreihe ($n-2$) ansetzen. Um diess recht anschaulich zu machen, mag hier die Darstellung der Ternen aus sechs verschiedenen Elementen eingeschaltet werden.

$$\begin{array}{rcl}
 a \ b \ c & a \ b \ d & a \ b \ e \ a \ b \ f = 4 \\
 & a \ c \ d & a \ c \ e \ a \ c \ f = 3 \\
 & & a \ d \ e \ a \ d \ f = 2 \\
 & & & a \ e \ f = 1 \\
 & b \ c \ d & b \ c \ e \ b \ c \ f = 3 \\
 & & b \ d \ e \ b \ d \ f = 2 \\
 & & & b \ e \ f = 1 \\
 & c \ d \ e & c \ d \ f = 2 \\
 & & c \ e \ f = 1 \\
 & & d \ e \ f = 1
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 20$$

In der Kürze kann man diess so ausdrücken:

$$\sum_0^{n-2} \sum x = \frac{n \ (n-1) \ (n-2)}{1. \ 2. \ 3.}$$

Bei Ternen mit Wiederholung ist die erste Reihe, oder die obere Grenze der Summirung wieder (m) daher:

$$\sum_0^m \sum x = \frac{m \ (m+1) \ (m+2)}{1. \ 2. \ 3} = C_m^{w.3} \dots (K)$$

der Ausdruck für ihre Anzahl.

Auf gleiche Weise gilt für die Quaternen:

$$\sum_0^m \sum \sum x = \frac{m \ (m+1) \ (m+2) \ (m+3)}{1. \ 2. \ 3. \ 4} \text{ u. s. w.}$$

Um allgemein die Zahl der Combinationen mit Wiederholung zu berechnen, setze man die Zahl der Wiederholungen in den Nebenreihen zu jener der Elemente in der ursprünglichen Reihe und nehme dann den Quotienten so vieler höchster und niedrigster Ordnungszahlen, als die Klasse Stellen hat.

Um diess durch ein Beispiel zu beleuchten, wähle man die Bestimmung der Zahl möglicher Würfe mit drei Würfeln.

$$\text{Sie ist } C_b^{w.3} = \sum_0^6 \sum x$$

Einerseits ist für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\sum x = 1, 3, 6, 10, 15, 21$$

$$\sum \sum x = 1, 4, 10, 20, 35, 56$$

$$\sum_0^6 \sum x = 56.$$

Andererseits

$$C_6^{w.3} = \frac{6.7.8}{1.2.3} = 56$$

19) Stellt man Variationen mit Wiederhohlung dar, so kommen immer so viel Reihen zum Vorschein, als nächst niedrigere Complexionen sind, und in jeder Reihe so viele Variationen, als Elemente neu einbezogen werden. Sind nun

$\alpha)$ Die Reihen gleich, so sind, weil die Zahl der Variationen erster Klasse oder (V_n^1) gleich n ist, und jedesmal wieder n Elemente einbezogen werden.

$$V_n^2 = n. n = n^2$$

$$V_n^3 = n^2. n = n^3$$

$$V_n^4 = n^3. n = n^4 \text{ u. s. w. (L)}$$

Daher wird die Zahl der Variationen mit Wiederhohlung aus Elementen gleicher Reihen gefunden, wenn man die Elementenanzahl zur Potenz der Klasse erhebt.

$\beta)$ Werden aber ungleiche Reihen genommen, wie z. B.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

so ist die Variationszahl das Product der Elementenanzahlen aus jeder Reihe.

Anwendung:

Darnach ist die Zahl der dreisilbigen Versfüsse (aus kurzen und langen Silben) $= 2^3 = 8$; die Anzahl der dreiziffrigen Zahlen überhaupt $= 9. 10. 10. = 900$. etc.

Differenzreihen.

20) Rechnet man die allgemeinen Combinationsformeln nach und nach für 1, 2, 3, 4 Elemente aus, so erhält man die Systeme der

$$\text{Ambenzahlen} \quad \text{auch} \quad \binom{n}{2} = 1, 3, 6, 10, 15 \dots$$

$$\text{Ternenzahlen} \quad \text{„} \quad \binom{n}{3} = 1, 4, 10, 20, 35 \dots$$

$$\text{Quaternenzahlen} \quad \text{„} \quad \binom{n}{4} = 1, 5, 15, 35, 70 \dots$$

u. a.

Diese werden zur Bestimmung des regelmässigen Fortschrittes vieler anderen Zahlenreihen benützt. Wo überhaupt mehrere Zahlenwerthe auf einander folgen, wie z. B. in der Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} 4, & 7, & 12, & 20, & 32, & 49, & \\ & 3 & 5 & 8 & 12 & 17 & \end{array}$$

geben zunächst je zwei folgende Zahlen eine Differenz, welche wir kurz mit Δ_1 bezeichnen wollen. Diese Differenzen können entweder alle gleich, oder der Reihe nach (wie oben) von einander verschieden sein. Im letzteren Falle kann man die Verschiedenheit der Glieder der ersten Differenzreihe durch zweite Indices ausdrücken, wie:

$$\Delta_{1.1} = 3 \quad \Delta_{1.2} = 5 \quad \Delta_{1.3} = 8 \quad \Delta_{1.4} = 12 \quad \Delta_{1.x} = \dots$$

Es ist nun ganz einfach zu entnehmen, dass jedes folgende Glied einer Zahlenreihe gleich sei dem ersten Glied mehr der Summe der bis zum gewählten Gliede reichenden Differenzen. Heissen u_1, u_2, u_3, u_4 die Glieder der Reihe so ist kurz:

$$u_n = u_1 + \sum_0^{n-1} \Delta_{1.x} \dots \dots (M)$$

Für den Fall, dass die Differenzen gleich sind, ist offenbar $\sum_0^{n-1} \Delta_1 = (n-1) \Delta_1$ daher:

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_1 \dots \dots (I.)$$

Wenn die ersten Differenzen ungleich sind, so kann man ihre Reihe wieder so, wie die ursprüngliche behandeln. Je zwei aufeinander folgende erste Differenzen geben eine zweite Differenz, welche wir allgemein Δ_2 nennen wollen. Jedes Glied der ersten

Differenz-Reihe ist dann gleich ihrem ersten Gliede mehr der Summe der zweiten Differenzen. Die kurze Bezeichnung ist:

$$\Delta_1 (n-1) = \Delta_{1.1} + \sum_0^{n-2} \Delta_{2.x}.$$

Man prüfe die Richtigkeit an dem Beispiele:

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

Substituiert man den gefundenen Wert in der Gleichung (M) so erhält man:

$$u_n = u_1 + \sum^{n-1} \left(\Delta_{1.1} + \sum^{n-2} \Delta_{2.x} \right) \text{ oder}$$

$$u_n = u_1 + \sum^{n-1} \Delta_{1.1} + \sum \sum^{n-2} \Delta_{2.x}$$

Nach I. ist die Summe der gleichen ersten Differenzen $(n-1) \Delta_{1.1}$ daher:

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_{1.1} + \sum \sum^{n-2} \Delta_{2.x}. (N)$$

Für den Fall, dass alle zweiten Differenzen gleich

$$\text{sind ist } \sum \sum^{n-2} \Delta_2 \text{ offenbar: } \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_2$$

$$\text{daher: } u_n = u_1 + (n-1) \Delta_{1.1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_2 \quad (II.)$$

Wenn auch die zweiten Differenzen ungleich sind, so geben dieselben eine dritte Differenzreihe, für welche das oben Gesagte wiederholt werden kann. Auch hier ist

$$\Delta_2 (n-2) = \Delta_{2.1} + \sum^{n-3} \Delta_{3.x} \text{ und durch Substitution in der Gleichung (N).}$$

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_{1.1} + \sum \sum^{n-2} \left(\Delta_{2.1} + \sum^{n-3} \Delta_{3.x} \right) \text{ oder}$$

$$u_n = u_1 + (n-4) \Delta_{1.1} + \sum \sum^{n-2} \Delta_{2.1} + \sum \sum \sum^{n-3} \Delta_{3.x}$$

und mit Rücksicht auf II:

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_{1.1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_{2.1} + \sum \sum \sum^{n-3} \Delta_{3.x}. (O)$$

Für den Fall, dass die dritten Differenzen gleich sind, ist die dreimalige Summe gleich dem Produkte aus der entsprechenden Ternenzahl in die Grösse der Differenz, oder:

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_{1.1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_{2.1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta_{3.1} \quad (III.)$$

Die weitere Ableitung ist leicht anzustellen, und daher möge das Ergebniss hier nur folgender Weise ausgesprochen werden:

In jeder Reihe von Zahlenwerten lässt sich jeder einzelne in folgende Bestandtheile zerlegen:

- α) den ersten Wert $= u_1$;
- β) die Differenz zwischen dem ersten und nächst folgenden so oftmal genommen als Glieder folgen;
- γ) Die Differenz der zwei ersten Differenzen so oftmal genommen, als je zwei Glieder auf das erste folgen;
- δ) Die Differenz der zwei ersten Glieder der zweiten Differenzreihe so oftmal genommen, als je drei Zahlenwerte in der ursprünglichen Reihe auf den ersten folgen u. s. f.

Man nennt eine solche Folge von Zahlenwerten Differenzreihen und zwar erster, zweiter, dritter . . . Ordnung, je nachdem sie nur erste, zweite, dritte Differenzen enthalten, während die höheren Null sind.

Mit Hülfe der Formeln (I, II, III . . .) kann man solche Reihen durch Rechnung fortsetzen. Den Gebrauch derselben mag auch folgendes Beispiel zeigen:

Mit der Zahl der Polygonseiten wächst zugleich die Anzahl der Diagonalen. Sie ist in einem

- 1. Dreieck $= 0$
- 2. Viereck $= 2$
- 3. Fünfeck $= 5$
- 4. Sechseck $= 9$
- 5. Siebeneck $= 14$
- 6. Achteck $= 20$

Sucht man die Differenzen dieser Reihe von Zahlenwerten, so ergibt sich

0	2	5	9	14	20
	2	3	4	5	6
		1	1	1	1

eine Reihe zweiter Ordnung (II.)

Man hat also die Diagonalenanzahl allgemein nach (II.)

$$u_n = 0 + (n-1) \cdot 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 1$$

oder zusammengezogen:

$$u_n = \frac{n^2 + n - 2}{1 \cdot 2}$$

Da die Ordnungszahl des Polygons die um 2 verminderte Seitenzahl ist, so hat man, wenn letztere s heisst,

$$n = (s-2), \text{ daher auch}$$

$$u_n = \frac{(s-2)^2 + (s-2) - 2}{1 \cdot 2} \quad \text{oder}$$

$$u_n = \frac{s(s-3)}{2}$$

als Abhängigkeitsgesetz zwischen Seiten- und Diagonal-Zahl der Polygone.

Über die Ordnungszahlen der Combinationen und Variationen.

21) Um zu bestimmen, die wievielte eine gegebene Ambe sei, denke man sich zunächst alle, d. h. $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ geordnet angesetzt. Hierauf lasse man alle jene weg, die mit einem höheren Elemente beginnen, als das erste der vorgelegten Complexion ist. Eigentlich sind das alle unter den nächst höheren Elementen für sich allein möglichen Amben, deren Zahl, wenn α, β die allgemeinen Indices der vorgelegten Amben-Elemente sind,

$$C_{n-\alpha}^2 = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)}{1 \cdot 2} \text{ ist.}$$

Man scheide auch alle jene Amben aus, die mit einem höheren Elemente schliessen, als das zweite der vorgelegten Complexion ist. Sie sind an Zahl gleich $(n-\beta)$.

Offenbar resultirt daraus die Formel für die Ordnungszahl einer gegebenen Ambe in folgender Weise:

$$z = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)}{1 \cdot 2} - \frac{(n-\beta)}{1} \dots (P.)$$

oder mit kürzerer Bezeichnung

$$z = C_n^2 - C_{n-\alpha}^2 - C_{n-\beta}^1, \text{ auch}$$

$$z = \binom{n}{2} - \binom{n-\alpha}{2} - \binom{n-\beta}{1}$$

Beispiel. Unter den Amben aus 90 Nummern der gewöhnlichen Lotterie ist 35 . 41 die 2471ste, denn

$$z = \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} - \frac{55 \cdot 54}{1 \cdot 2} - 49$$

$$z = 2471$$

22) Zur ähnlichen Bestimmung der Ternen-Ordnungszahl denkt man sich

1. Alle möglichen Ternen bestimmt, oder allgemein die Zahl derselben $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

2. Davon lasse man alle weg, die am ersten, zweiten, oder dritten Orte ein höheres Element haben, als die vorgelegte Complexion. Die hiefür geltenden Zahlen bestimmt man folgender Weise, wenn α, β, γ , die Indices der gegebenen Terne sind:

α) Alle unter den $(n-\alpha)$ übrigen Elementen möglichen Ternen fangen mit einem höheren Elemente an. Ihre Zahl ist

$$C_{n-\alpha}^3 = \binom{n-\alpha}{3}$$

β) Alle unter den in dem Reste $(n-\beta)$ enthaltenen Elementen möglichen Amben fangen mit einem höheren Elemente an, als das zweite der vorgelegten Combination ist. Wenn man diese Amben mit dem ersten in der gegebenen Complexion enthaltenen Elemente verbindet, so entstehen Ternen, welche an zweiter Stelle nächst höher sind. Ihre Zahl ist also $C_{n-\beta}^2 = \binom{n-\beta}{2}$

γ) Alle unter $(n-\gamma)$ enthaltenen Ternen müssen mit einem höheren Elemente schliessen.

Es nimmt somit die verlangte Formel folgende Gestalt an:

$$z = \binom{n}{3} - \binom{n-\alpha}{3} - \binom{n-\beta}{2} - \binom{n-\gamma}{1} \dots \dots (Q)$$

Ebenso führt die Betrachtung der Quaternen zu folgender Formel:

$$z = \binom{n}{4} - \binom{n-\alpha}{4} - \binom{n-\beta}{3} - \binom{n-\gamma}{2} - \binom{n-\delta}{1} \dots \dots (R)$$

Der allgemeine Gang der Formel lässt sich leicht ersehen.

23) An das Vorhergehende lässt sich die Lösung folgender Aufgabe knüpfen:

Von achtzehn möglichen Fällen eines physischen Ereignisses treten periodisch je vier auf und bis zur Zeit sei folgende Reihe der Combinationen constatirt:

1.	4.	5.	15
1.	4.	11.	14
1.	5.	9.	13
1.	6.	9.	15
1.	7.	12.	13
1.	9.	11.	18
1.	13.	14.	15.

Man versuche die Gesetzmässigkeit dieser Reihe zu ermitteln und das nächst folgende Glied zu berechnen.

Lösung:

Um die Anordnung der vorhandenen Quaternen beurtheilen zu können, muss man zunächst ihre Ordnungszahlen wissen und diese sind allgemein:

$$z = \binom{n}{4} - \binom{n-\alpha}{4} - \binom{n-\beta}{3} - \binom{n-\gamma}{2} - \binom{n-\delta}{1}$$

Nach dieser Formel rechnet man:

$$z_1 = \frac{18.17.16.15}{1.2.3.4} - \frac{17.16.15.14}{1.2.3.4} - \frac{14.13.12}{1.2.3} - \frac{13.12}{1.2} - \frac{3}{1}$$

worin $(n-\alpha) = 18 - 1 = 17$
 $(n-\beta) = 18 - 4 = 14$
 $(n-\gamma) = 18 - 5 = 13$
 $(n-\delta) = 18 - 15 = 3$ ist.

$$z_1 = 235$$

Ebenso ist:

$$z_2 = \frac{18.17.16.15}{1.2.3.4} - \frac{17.16.15.14}{1.2.3.4} - \frac{14.13.12}{1.2.3} - \frac{7.6}{1.2} - \frac{4}{1}$$

$$z_2 = 291$$

$$z_3 = 353$$

$$z_4 = 421$$

$$z_5 = 495$$

$$z_6 = 575$$

$$z_7 = 661.$$

Die so gefundenen Zahlenwerte geben eine Differenzreihe zweiter Ordnung, wie man sich leicht überzeugt, wenn man je zwei auf einander folgende Glieder und hernach je zwei Differenzen von einander substrahirt. Man hat

$$\begin{array}{cccccccc} 235 & , & 291 & , & 353 & , & 421 & , & 495 & , & 575 & , & 661 \\ & & 56 & & 62 & & 68 & & 74 & & 80 & & 86 \\ & & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 \end{array}$$

Dadurch ist der Anhaltspunkt zur Berechnung der weiter folgenden Ordnungszahlen gewonnen. Nach (20) ist jedes folgende Glied der Reihe

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_2,$$

oder mit Rücksicht auf die gegebenen Zahlen

$$u_n = 235 + (n-1) \cdot 56 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 6.$$

Das achte Glied der Reihe ist also:

$$u_8 = 235 + 7 \cdot 56 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot 6$$

$$u_8 = 235 + 392 + 126$$

$$u_8 = 753.$$

d. h. im weiteren Verlauf der Erscheinung wird die 753. Combination eintreffen.

24) Ehe dazu geschritten wird, diese nach Elementen anzugeben, muss vorerst die allgemeine Beantwortung der Frage, wie aus der bekannten Ordnungszahl eine Combination nach Elementen herzustellen sei, eingeflochten werden. -- Die Abhängigkeit zwischen der Ordnungszahl und den Indices der combinirten Elemente ist in der allgemeinen Formel zur Bestimmung der ersteren enthalten. Man hat allgemein

$$z = \binom{n}{r} - \binom{n-\alpha}{r} - \binom{n-\beta}{r-1} - \binom{n-\gamma}{r-2} - \binom{n-\delta}{r-3} \dots$$

Da es sich um die Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma \dots$ handelt, überträgt man die Glieder, welche diese Grössen enthalten, in den ersten Theil der Gleichung. Sie lautet so modificirt:

$$\binom{n-\alpha}{r} + \binom{n-\beta}{r-1} + \binom{n-\gamma}{r-2} \dots = \binom{n}{r} - z \quad (S)$$

Kürze halber nenne man vorläufig

$(n-\alpha) = x$, $(n-\beta) = y$, $(n-\gamma) = t$, dann ist

$$\binom{x}{r} + \binom{y}{r-1} + \binom{t}{r-2} = \binom{n}{r} - z$$

Der zweite Theil der Gleichung drückt die Differenz zwischen der Gesamtanzahl der Combinationen einer Klasse und der gegebenen Ordnungszahl aus. Im Hinblick auf den ersten Theil hat man *diese Differenz in eine Reihe von Combinationszahlen derselben und jeder anderen Klasse in fallender Ordnung zu zerlegen.*

Das erreicht man durch ganzhaltige positive Lösung der Gleichungen:

$$\binom{x}{r} = \binom{n}{\gamma} - z - r_1$$

$$\binom{y}{r-1} = r_1 - r_2$$

$$\binom{t}{r-2} = r_2 - r_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Grössen r_1, r_2, r_3 drücken kurz die Reste aus, welche resultiren, wenn in den angesetzten Gleichungen das grösstmögliche ganze positive $x, y, t \dots$ genommen wird.

Da endlich $x = n - \alpha, y = n - \beta, t = n - \gamma \dots$ ist, so findet man ganz einfach

$\alpha = n - x, \beta = n - y, \gamma = n - t \dots$ als Indices der verlangten Complexion.

25) Für das oben angeführte Beispiel kann also die 753. Combination folgender Weise gefunden werden:

1) Man ziehe die Ordnungszahl von $\binom{18}{4}$, der Gesamtzahl möglicher Quaternen ab. Es erübrigt $\binom{18}{4} - 753 = 2307$.

2) Man suche die grösste ganze positive Zahl, welche der Gleichung

$$\binom{x}{4} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2307 \text{ entspricht.}$$

Die Zahl ist $x = 16$. Mit andern Worten ist $\binom{16}{4}$ die grösste Quaternenzahl, welche in 2307 enthalten ist. Es bleibt der Rest $r_1 = 2307 - \binom{16}{4} = 2307 - 1820 = 487$

3) Die zweite Gleichung:

$$\binom{y}{r-1} = 487$$

gibt als nächsten ganzen Wert für y die Zahl 15

$$\text{d. h. } \binom{15}{3} = 487 - r_2$$

$$r_2 = 487 - 455 = 32$$

4) Die dritte Gleichung

$\binom{t}{2} = 32$, mit welcher eigentlich gesagt wird, dass man die nächst niedrigere Ambenzahl daraus nehmen soll, gibt der Unbekannten t den Wert 8, worauf ein Rest $r_3 = 32 - 28 = 4$ bleibt.

5) Die vierte Gleichung lautet einfach $u = 4$. Nun sind die gefundenen Werte von x, y, z, u nach (24) einzurichten. Es ist

$$\alpha = n - x = 18 - 16 = 2$$

$$\beta = n - y = 18 - 15 = 3$$

$$\gamma = n - t = 18 - 8 = 10$$

$$\delta = n - u = 18 - 4 = 14$$

Es hat daher die Combination 2. 3. 10. 14 einzutreffen.

26) Für die Combinationen mit Wiederholung lässt sich ganz derselbe Weg verfolgen, der zur Bestimmung der vorhergehenden Formeln geführt hat. Es kann deshalb genügen, wenn man diese für den Fall der Wiederholung bloss modificirt. Da hier nach (18) jedesmal $(n + 1)$, $(n + 2)$, $(n + 3)$ zu setzen ist, wo bei einfachen Combinationen $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ vorkommt, so nimmt die Formel zur Berechnung einer gewissen Ordnungszahl der r -ten Klasse allgemein folgende Gestalt an:

$$z = \binom{n+r-1}{r} - \binom{n-\alpha+r-1}{r} - \binom{n-\beta+r-2}{r-1} - \binom{n-\gamma+r-3}{r-2} - \dots \quad (T)$$

wobei, wie früher α , β , γ die allgemeinen Indices der combinirten Elemente und r die oberste Klasse der Combinationen angiebt. Specialisirend gelangt man zu folgenden Formeln:

1) für Amben

$$z = \binom{n+1}{2} - \binom{n-\alpha+1}{2} - \binom{n-\beta}{1}$$

Darnach ist z. B. mit Berücksichtigung der Augenzahl auf beiden Würfeln 3. 4 der 13. Wurf; denn

$$z = \binom{6+1}{2} - \binom{6-3+1}{2} - \binom{6-4}{1}$$

$$z = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} - \frac{2}{1}$$

$$z = 21 - 6 - 2 = 13.$$

2) für Ternen

$$z = \binom{n+2}{3} - \binom{n-\alpha+2}{3} - \binom{n-\beta+1}{2} - \binom{n-\gamma}{1}$$

Beispiel. Aus drei Reihen zu 24 Gliedern wird die Terne N. 9, 17, 20 herausgehoben. Welche Ordnungszahl entspricht derselben?

Lösung.

$$z = \binom{24+2}{3} - \binom{26-9}{3} - \binom{25-17}{2} - \binom{24-20}{1}$$

$$z = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} - \frac{4}{1}$$

$$z = 2600 - 712 = 1888.$$

3) für Quaternen

$$z = \binom{n+3}{4} - \binom{n-\alpha+3}{4} - \binom{n-\beta+2}{3} - \binom{n-\gamma+1}{2} - \binom{n-\delta}{1} \text{ u. s. w.}$$

Beispiel:

Die Glieder folgender vier Progressionen

1	3	5	7	9	...
1	4	9	16	25	...
1	4	9	16	25	...
1	3	5	7	9	...

treten in Combinationen zu je vier Gliedern auf, und geben eine steigende Reihe von Summen. Wie gross und die wie viele verschiedene Summe ist jene, welche aus dem

1. Gliede der ersten Reihe
4. „ der zweiten
9. „ der dritten
16. „ der vierten gebildet wird?

Lösung. Da vorerst nur zwei Elemente der Quaterne bekannt sind, müssen die beiden anderen durch Fortsetzung der Reihen gefunden werden. Sucht man die Differenzen der dritten Reihe

1	4	9	16	25
	3	5	7	9
		2	2	2

so wird ersichtlich, dass für dieselbe die Formel (II) aus 20 gelte. Es ist:

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_{1,1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \Delta_{2,1}$$

$$u_n = 1 + (n-1) \cdot 3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \quad \text{und das}$$

fragliche

$$u_9 = 1 + 8 \cdot 3 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2$$

$$u_9 = 1 + 24 + 56$$

$$u_9 = 81$$

Bestimmt man gleichfalls die Differenzen in der vierten Reihe

1	3	5	7	9
	2	2	2	2

so sieht man eine Reihe erster Ordnung vor sich und für diese gilt (20, I) allgemein

$$u_n = u_1 + (n-1) \Delta_1 ; \text{ das fragliche}$$

$$u_{16} = 1 + 15 \cdot 2 = 31$$

Darnach ist die Combination aus den Gliedern 1, 16, 81 und 31, oder wenn man die allgemeine Ausdrucksweise wählt, aus $a_{1.1}$ $a_{2.4}$ $a_{3.9}$ $a_{4.16}$ zusammengesetzt. Es ist leicht zu entnehmen, dass hier die ersten Indices die Reihen und die zweiten die Glieder bestimmen. Die Summe der Glieder ist also:

$$1 + 16 + 81 + 31 = 129.$$

Da diese Summe ungeändert bleibt, wenn man die Summanden in beliebiger Ordnung ansetzt, so kann man die Grösse a mit dem ersten Index als gleichbedeutend für die Ordnungszahl der Summe übergehen, und zur Bestimmung der letzteren nur die zweiten Indices behalten.

Diese sind also 1, 4, 9, 16. Offenbar bleibt die Ordnungszahl der Summe gleich, ob auch die Glieder der progressiven Reihen beliebig weit fortgehen. Lassen wir das Ende mit dem 16. Gliede jeder Reihe eintreten, um die Rechnung genau nach (26) auszuführen, so ist allgemein

$$z = \binom{n+3}{4} - \binom{n-\alpha+3}{4} - \binom{n-\beta+2}{3} - \binom{n-\gamma+1}{2} - \binom{n-\delta}{1}$$

und speciell für $\alpha = 1$

$$\beta = 4$$

$$\gamma = 9$$

$$\delta = 16$$

$$z = \binom{16+3}{4} - \binom{19-1}{4} - \binom{18-4}{3} - \binom{17-9}{2} - \binom{16-16}{1}$$

$$z = 3876 - 3060 - 364 - 28 - 0$$

$$z = 3876 - 3452$$

$$z = 424.$$

Fasst man die Ergebnisse dieser Rechnung nochmals kurz zusammen, so gewähren sie folgenden Ueberblick. Wenn man aus den Gliedern der vier gegebenen arithmetischen Progressionen im Sinne der Combination progressive quaternäre Summen bildet, so ist diejenige, welche aus den einzelnen Reihen das erste, vierte, neunte und sechzehnte Glied in sich enthält, gleich 129 der Grösse und die 424ste der Ordnung nach.

Beispiel 2. Es seien vier Reihen von Grössen gegeben, welche gleichmässig im Werthe zunehmen, wie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; welche Ordnungszahl hat man dann dem Produkte 4.4.6.6 zu geben? —

Beispiel 3. Jemand trifft mit drei Würfeln die Augenzahlen 3. 3. 6. — Wie viel höhere Würfe gibt es, wenn nicht bloss die

Summe der Augen, auf allen Würfeln, sondern auch die Augenzahl auf jedem einzelnen entscheidet?

27. Das entgegengesetzte Verfahren oder die Bestimmung der Combination aus der gegebenen Ordnungszahl ist wesentlich dasselbe, welches bei Combinationen ohne Wiederholung befolgt wurde. Man findet also auch hier die Indices der zusammengehörigen Elemente aus den Gleichungen der Ordnungszahlen, wie folgt:

1) Für Amben gilt nach (26)

$$z = \binom{n+1}{2} - \binom{n-\alpha+1}{2} - \binom{n-\beta}{1};$$

2) für Ternen

$$z = \binom{n+2}{3} - \binom{n-\alpha+2}{3} - \binom{n-\beta+1}{2} - \binom{n-\gamma}{1};$$

3) allgemein

$$z = \binom{n+r-1}{r} - \binom{n-\alpha+r-1}{r} - \binom{n-\beta+r-2}{r-1} - \binom{n-\gamma+r-3}{r-2} \dots$$

Nennt man wieder kurz

$$n - \alpha = x$$

$$n - \beta = y$$

$$n - \gamma = t \text{ u. s. w.,}$$

so gehen die Gleichungen über in

$$z = \binom{n+1}{2} - \binom{x+1}{2} - \binom{y}{1}$$

$$z = \binom{n+2}{3} - \binom{x+2}{3} - \binom{y+1}{2} - \binom{t}{1}$$

$$z = \binom{n+r-1}{r} - \binom{x+r-1}{r} - \binom{y+r-2}{r-1} - \binom{t+r-3}{r-2} \dots$$

Ueberträgt man die Glieder, welche die Unbekannten x, y, t enthalten, in den ersten Theil, so hat man

$$\binom{x+1}{2} + \binom{y}{1} = \binom{n+1}{2} - z$$

$$\binom{x+2}{3} + \binom{y+1}{2} + \binom{t}{1} = \binom{n+2}{3} - z$$

$$\binom{x+r-1}{r} + \binom{y+r-2}{r-1} + \binom{t+r-3}{r-2} + \dots = \binom{n+r-1}{r} - z$$

Im zweiten Theile ist die Differenz zwischen der Zahl aller möglichen und der bis zur gegebenen reichenden Combinationen gegeben. Man soll sie nun in eine Reihe von nächst niedrigeren Combinationenzahlen zerlegen. Diess erreicht man, wenn man die Gleichungen in folgender schon bekannten Form ganzhaltig auflöst.

$$\binom{x+1}{2} = \binom{n+1}{2} - z - r_1$$

$$\binom{y}{1} = r_1 \quad \text{dann}$$

$$\binom{x+2}{3} = \binom{n+2}{3} - z - r_1$$

$$\binom{y+1}{2} = r_1 - r_2$$

$$\binom{t}{1} = r_2, \text{ oder allgemein}$$

$$\binom{x+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{r} - z - r_1$$

$$\binom{n+r-2}{r-1} = r_1 - r_2$$

$$\binom{t+r-3}{r-2} = r_2 - r_3 \quad \text{u. s. w.,}$$

wobei, wie früher r_1, r_2, r_3 die Reste angeben, welche erübrigen, wenn für $x, y, t \dots$ die grösstmöglichen ganzen, positiven Zahlen eingesetzt werden. Eine Anwendung dieser Formeln kann bei der Probe des im vorhergehenden Paragraph bei der Ternenordnungszahl gegebenen Beispiels gemacht werden. Man hat dort

$$1888 = 2600 - \binom{x+2}{3} - \binom{y+1}{2} - \binom{t}{1}$$

wobei kurz $x = n - \alpha$

$$y = n - \beta$$

$$t = n - \gamma \text{ gesetzt wird.}$$

Nun ist für

$$\frac{(x+2)}{1} \cdot \frac{(x+1)}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{(y+1)}{1} \cdot \frac{y}{2} + t = 2600 - 1888$$

nach und nach der grösste ganzhaltige Wert zu nehmen. Diess giebt zunächst in

$$\frac{(x+2)}{1} \cdot \frac{(x+1)}{2} \cdot \frac{x}{3} = 712 - r_1$$

$x = 15$; denn es ist

$$\frac{17}{1} \cdot \frac{16}{2} \cdot \frac{15}{3} = 712 - 32.$$

Dann ist in

$$\frac{(y+1)}{1} \cdot \frac{y}{2} = 32 - r_2$$

$y = 7$, wobei

$$\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 32 - 4 \text{ und}$$

zuletzt

$$t = 4 \text{ ist.}$$

Durch Substitution der gefundenen Werte $x = 15$, $y = 7$, $t = 4$ in die obigen Gleichungen ergibt sich

$$15 = 24 - \alpha, \text{ oder } \alpha = 9$$

$$7 = 24 - \beta, \quad „ \quad \beta = 17$$

$$4 = 24 - \gamma, \quad „ \quad \gamma = 20$$

(siehe 26. 2).

28. Bei den Variationen hat man dem Bildungsgesetze gemäss höhere vorangehende und höhere nachfolgende Elemente in den Complexionen zu unterscheiden. Dann ist es aber auch ganz natürlich, dass, wenn überhaupt diese höheren Elemente in Rechnung kommen, die Zahl der vorhergehenden negativ in Bezug auf die Zahl der folgenden gesetzt werden müsse. So hat die Variation *dba* unter sieben Elementen mit Rücksicht auf *a* zwei vorhergehende und sechs nachfolgende höhere Elemente. In der Rechnung kommen dieselben als $+6 - 2 = +4$ vor.

Die vorangehenden Elemente haben den Einfluss, dass sie für die folgenden Variationen *als nicht vorhanden* betrachtet werden müssen. Ihre Zahl wird daher bei den bekannten Ausdrücken $(n-\alpha)$, $(n-\beta)$, $(n-\gamma)$. . . zu n geschlagen, d. h. wenn etwa in $(n-\gamma)$ oder allen höheren Elementen zwei vorangehende enthalten sein sollen, hat man $((n-2) - \gamma)$ und nicht $(n-\gamma-2)$ zu setzen. Man hat nämlich auch zur Bestimmung der Ordnungszahl einer Variation alle jene wegzulassen, die an erster, zweiter dritter . . . Stelle ein höheres Element aufweisen, als jenes der vorgelegten Complexion ist, nur muss in der Zahl der höheren Elemente der Theil der vorhergehenden von jenem der folgenden getrennt werden, wie diess oben bemerkt wurde. Daher lauten die Formeln einzeln:

1) für binäre Variationen

$$z = V_n^2 - (n-\alpha)(n-1) - (n-\beta) \text{ oder wenn das erste Element ein höheres ist, nach Obigem}$$

$$z = n(n-1) - (n-\alpha)(n-1) - ((n-1)-\beta) \dots (U)$$

Beispiel: 3. 8 ist unter 9 Elementen die 23. Variation, denn nach der Formel ist:

$$z = 98 - (9-3) \cdot 8 - (9-8)$$

$$z = 72 - 48 - 1$$

$$z = 23$$

Ebenso ist 8 3 die 59ste Variation, denn

$$z = 98 - (9-8) \cdot 8 - ((9-1) - 3)$$

$$z = 72 - 8 - 5$$

$$z = 59$$

2) für ternäre Variationen

$$z = V_n^3 - (n-\alpha)(n-1)(n-2)$$

$$- (\bar{n}-\beta)(\bar{n}-1)$$

$$- (\bar{n}-\gamma)$$

Anmerkung. Kürze halber soll das überstrichene ($\bar{n}$) die Differenz zwischen allen und den vorhergehenden höheren Elementen angeben.

3) für quaternäre Variationen

$$z = V_n^4 - (n-\alpha)(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$- (\bar{n}-\beta)(\bar{n}-1)(\bar{n}-2)$$

$$- (\bar{n}-\gamma)(\bar{n}-1)$$

$$- (\bar{n}-\delta)$$

Darnach sind die folgenden Formeln leicht herzustellen. Man hat allgemein

$$z = V_n^r - (n-\alpha)(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

$$- (\bar{n}-\beta)(\bar{n}-1)(\bar{n}-2) \dots (n-r+2)$$

$$- (\bar{n}-\gamma)(\bar{n}-1)(\bar{n}-2) \dots (n-r+3)$$

$$- (\bar{n}-\delta) \dots \text{u. s. w.}$$

Beispiel. Unter vier Elementen ist bda oder 241 die eilfte Variation, denn

$$z = V_4^3 - (4-2)(4-1)(4-2)$$

$$- (4-4)(4-1)$$

$$- (2-1)$$

$$z = 24 - 12 - 0 - 1 = 11.$$

29) Die Variationen scheiden sich in Gruppen, bei denen jedesmal ein Element so oft an erster Stelle vorkommt, als unter den anderen selbst Variationen niedriger Ordnung möglich sind. Im Ganzen ist jede Variationszahl

$$V_n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots$$

Das ist auch die Ordnungszahl der letzten varianten Combination. Für jede andere Ordnungszahl hat man davon einen Theil an Hauptgruppen, bekanntlich $(n-\alpha)$, und ebenso nach und nach je einen Theil der ersten, zweiten Nebengruppe zu nehmen. Es ist also auch allgemein

$$\begin{aligned} z = V_n - & (n-\alpha)(n-1)(n-2)(n-3) \dots \\ & - x(n-2)(n-3) \dots \\ & - y(n-3)(n-4) \dots \\ & - t(n-4) \dots, \end{aligned} \quad (V)$$

da wir wieder mit den Coefficienten x, y, t die Zahl der verwendeten höheren Elemente, als das zweite, dritte u. j. a. einer bestimmten Complexion ist, bezeichnen wollen.

Was oben von der Zusammensetzung der Variationsgruppen gesagt wurde, möge das nachstehende Schema beleuchten.

Gegeben seien zu quaternären Variationen die Elemente: a, b, c, d, e

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} b c d \\ b c e \\ b d c \\ b d e \\ b e c \\ b e d \\ c b d \\ c b e \\ c d b \\ c d e \\ c e b \\ c e d \\ d b c \\ d b e \\ d c b \\ d c e \\ d e b \end{array} \right\} a + \left\{ \begin{array}{l} d e c \\ e b c \\ e b d \\ e c b \\ e c d \\ e d b \\ e d c \end{array} \right\} b + \left\{ \begin{array}{l} c d \\ c e \\ d c \\ d e \\ e c \\ e d \end{array} \right\} a + \left\{ \begin{array}{l} a d \\ a e \\ d \left\{ \begin{array}{l} a \\ e \end{array} \right\} \\ \text{etc.} \end{array} \right\} c \end{aligned}$$

30) Kehren wir nun zur Gleichung (V) zurück. Mit Hülfe derselben lässt sich aus einer bekannten Ordnungszahl die entsprechende Complexion darstellen, oder die dem Paragraph (28) entgegengesetzte Operation ausführen.

Ueberträgt man V_n in das erste Glied und ändert die Zeichen, so gelangt man zu dem Ausdrucke:

$$V_n - z = (n-\alpha)(n-1)(n-2) \dots \\ + x(n-2)(n-3) \dots \dots \dots \\ + y(n-3) \dots \dots$$

Durch Division erhält man in demselben Sinne, wie bei den Combinationen

$$\frac{V_n - z}{(n-1)(n-2) \dots} = (n-\alpha) + r_1 \\ \frac{r_1}{(n-2)(n-3) \dots} = x + r_2 \\ \frac{r_2}{(n-3)(n-4) \dots} = y + r_3 \text{ u. s. w.}$$

Die erhaltenen Quotienten geben direct an, wie viele höhere Elemente zu den nachfolgenden Variationen genommen werden müssten, um dieselben darzustellen. Aus allem dem ergeben sich daher folgende Regeln:

1. Man ziehe die gegebene Zahl von der Zahl aller Variationen ab.

2. Man dividire die erhaltene Differenz nach und nach mit den bekannten niederen Variationszahlen, um die Coëfficienten zu erhalten.

3. Man erhöhe jeden Coëfficienten um eine Einheit und nehme darnach die Elemente abwärts zählend, ohne diejenigen, welche bereits herausgehoben sind, nochmals einzubegreifen.

Beispiel. Unter 5 Elementen ist die 35ste quaternäre Variation = 2. 3. 5. 1; denn zunächst ist

$$V_5^4 - z = 120 - 35 = 85,$$

ferner

$$\begin{array}{l} 85 : 4.3.2 = 3 = (n-\alpha) \\ 13 : 3.2 = 2 = x \\ 1 : 2 = 0 = y \\ 1 : 1 = 1 = t \end{array}$$

Nun hat unter 1, 2, 3, 4, 5 für den Coëfficienten 3 das Element 2
 " " 2 " " 3
 " " 0 " " 5
 " " 1 " " 1
 einzutreffen.

Aufgabe. Wenn aus einer Reihe von zwölf Elementen nach einander folgende ternäre Variationen angesetzt werden:

1 . 11 . 12
 2 . 10 . 12
 3 . 10 . 12
 4 . 11 . 12
 6 . 1 . 12
 7 . 4 . 12;

darf man wol annehmen, dass diess aufs Geradewol geschehen ist? Lässt sich die Reihe in Folge innerer Gesetzmässigkeit ausdehnen und wie?

31) Bei Variationen mit Wiederholung besteht nach dem Bildungsgesetze der einzige Unterschied darin, dass zu jeder Gruppe alle Elemente einbezogen werden. Darnach ist jede Ordnungszahl bestimmt durch

$$z = V_n^r - (n-\alpha) n^{r-1} \\ - (n-\beta) n^{r-2} \\ - (n-\gamma) n^{r-3} \text{ u. s. f. } \dots \quad (W)$$

Nun ist

$$n^r - (n-\alpha) n^{r-1} = \alpha n^{r-1} \\ - (n-\beta) n^{r-2} = - n^{r-1} + \beta n^{r-2} \\ - (n-\gamma) n^{r-3} = - n^{r-2} + \gamma n^{r-3} \text{ u. s. f. ;}$$

desshalb auch

$$z = (\alpha-1) n^{r-1} + (\beta-1) n^{r-2} + (\gamma-1) n^{r-3} \dots \quad (X)$$

In der so bestimmten Gleichung sind folgende Regeln zur Darstellung der Variationen m. W. aus bekannten Ordnungszahlen enthalten:

1. Man dividire die gegebene Ordnungszahl nach und nach durch die nächst niederen Potenzen der Elementenanzahl.

2. Man vermehre die erhaltenen Quotienten um eine Einheit und behandelt sie als Indices der zu nehmenden Elemente. Der letzte Rest wird nicht erhöht.

Anmerkung. Bei der Division darf der letzte Rest nicht Null sein, denn es muss offenbar der Index des letzten Gliedes erübrigen. Sollte daher die Division aufgehen, so nimmt man den nächst niedrigeren Quotienten.

Beispiel. Die 17te ternäre Variation für drei Elemente ist b c b oder 2 3 2, denn nach (X) ist folgende Zerlegung möglich:

$$\frac{17}{3^2} = \alpha - 1 = 1 + r_1 = 8$$

$$\frac{8}{3} = \beta - 1 = 2 + r_2 = 2$$

$$2 = (\gamma - 1) = 2$$

Zur Bestimmung der Indices hat man

$$\alpha - 1 = 1 \quad \text{daher} \quad \alpha = 2$$

$$\beta - 1 = 2 \quad \text{„} \quad \beta = 3$$

$$(\gamma - 1) = 2 \quad \text{„} \quad \gamma = 2$$

Beispiel 2. Die 24. Variation derselben Elemente ist 323, denn nach obiger Regel findet man

$$\frac{24}{3} : 9 = 2, \text{ oder den Index } 3$$

$$\frac{6}{3} : 3 = 1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 2$$

$$\frac{3}{3} : 3 = 1, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 3$$

32) Ein kurzer Ueberblick des Ganzen lehrt nun, dass die Operationen des Permutirens, Combinirens und Varirens Reihen entstehen lassen, welche geordnet sind

1) nach Producten der natürlich geordneten Zahlen, wie:

$$z = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2.1 + a_3 \cdot 3.2.1 + a_4 \cdot 4.3.2.1 + \dots$$

2) nach Summen der Summen aus den Zahlen in natürlicher Ordnung, wie:

$$z = a_1 + a_2 [1 + 2 + 3 + 4 \dots] + a_3 \left[\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \\ + 1 + 2 + 3 + \dots \\ + 1 + 2 + \dots \\ + 1 + \dots \end{array} \right] +$$

3) nach beiden zugleich, wie

$$z = a_1 \cdot 1 + a_2 [1 + 2 + 3 + 4 \dots].2.1 + a_3 \left[\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + \dots \\ + 1 + 2 + \dots \\ + 1 + \dots \end{array} \right] 3.2.1. + \dots \quad \text{u. s. w.}$$

4) nach Potenzen einer bestimmten Zahl, wie:

$$z = a_1 + a_2 \cdot n + a_3 \cdot n^2 + a_4 \cdot n^3 + \dots$$

(vergl. Paragraph 10, 18, 16 und 28, dann 31.)

Ueber die Maasse einer Zahl.

33) Jede Zahl lässt sich bekanntlich in Primfactoren zerlegen, wenn sie nicht etwa selbst Primzahl ist. Sind nun diese ihre Elemente *einzelu von einander verschieden*, so ist die gegebene Zahl nebst den Primzahlen auch durch alle Combinationen, welche man aus denselben herstellen kann, theilbar. Man hat dann für die Zahl, als Product von u verschiedenen Primzahlen

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ primäre Maasse} &= u \\ \beta) \text{ binäre} &= \frac{u(u-1)}{1 \cdot 2} \\ \gamma) \text{ ternäre} &= \frac{u(u-1)(u-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Wenn eine Zahl *aus lauter gleichen Factoren* zusammengesetzt ist, so ist sie durch sich selbst, als höchste Combination oder Potenz, und durch alle niederen Potenzen der Grundzahl theilbar. So ist z. B. die Zahl $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ theilbar durch

$$3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3, 1.$$

Ist eine Zahl das Product mehrerer Potenzen, wie z. B. $2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^2 = 8 \cdot 27 \cdot 16 = 3456$, so lassen sich ihre Maasse zunächst in Reihen angeben, wie etwa

$$\begin{array}{l} 1, 2, 2^2, 2^3 \\ 1, 3, 3^2, 3^3 \\ 1, 4, 4^2, \\ \text{oder allgemein} \quad 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \dots \alpha^m \\ \quad \quad \quad 1, \beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4 \dots \beta^n \\ \quad \quad \quad 1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4 \dots \gamma^p \end{array}$$

Dann werden die höheren Maasse durch Variationen gefunden, da jedes Glied einer folgenden Reihe mit jedem Gliede und jeder Verbindung der vorhergehenden zusammengestellt werden kann. Ihre Anzahl wird gefunden, wenn man die höchsten Exponenten aus jeder Reihe um 1 vermehrt und dann multiplicirt. Sie ist in unserem allgemeinen Beispiel

$$(m+1)(n+1)(p+1),$$

im besonderen

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48,$$

Bei ihrer wirklichen Darstellung schlägt man denselben Weg ein, als würde man die geordneten Polynome

$$\begin{array}{l} 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^m \\ 1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^n \\ 1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^p \end{array}$$

multipliciren.

Wenn eine Zahl in gleiche und verschiedene Primfactoren zerlegt werden kann, und man nennt die Zahl jener, welche sich wiederhohlen, m , und die Anzahl der nur einmal vorkommenden u , so kann durch wirkliche Darstellung der combinirten Maasse leicht ersichtlich gemacht werden, dass die Zahl der primären Maasse $m + u$, die der binären

$$\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + m \cdot u + \frac{u(u-1)}{1 \cdot 2},$$

jene der ternären

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \cdot u + m \cdot \frac{u(u-1)}{1 \cdot 2}$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{u. s. w. ist.}$$

Anmerkung. Diese Formel hat nur so lange volle Gültigkeit, als die Complexionen in den wiederhohlen Elementen wirklich möglich sind, sonst sind die Differenzen Glied für Glied in den angesetzten Ausdruck einzuschalten.

Im Folgenden soll die Combinationstheorie in einer Richtung genommen werden, welche zunächst sehr fördernd auf die Handhabung der Gleichungen wirkt.

III. Abtheilung.

Elemente der Determinanten.

Variante Producte.

34) Verschiedene Factoren aus verschiedenen gleichzeitig vorkommenden Reihen genommen geben im allgemeinen variante Producte.

Wählt man z. B. die Reihen

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{array}$$

so sind

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_2 & c_3 \\ a_1 & b_3 & c_2 \\ a_2 & b_1 & c_3 \\ a_2 & b_3 & c_1 \\ a_3 & b_1 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} a_{1.1} & a_{2.2} & a_{3.3} \\ a_{1.1} & a_{2.3} & a_{3.2} \\ a_{1.2} & a_{2.1} & a_{3.3} \\ a_{1.2} & a_{2.3} & a_{3.1} \\ a_{1.3} & a_{2.1} & a_{3.2} \\ a_{1.3} & a_{2.2} & a_{3.1} \end{array}$$

alle möglichen varianten Producte. In denselben kommt aus jeder Vertikalreihe ein Faktor vor und die beigesetzten Indices geben permutirend an, aus welcher Horizontalreihe die gleichbenannten Glieder zu nehmen sind. Im zweiten Falle sind die Verticalreihen durch die ersten, und die Horizontalreihen durch die zweiten Indices ausgedrückt. In besonderen Zahlen geben etwa

$$\begin{array}{ccc} + 2 & + 3 & + 4 \\ + 3 & - 4 & - 2 \\ + 4 & + 2 & + 3 \end{array}$$

folgende variante Producte:

$$\begin{array}{l} 2. - 4.3 \quad , \quad 2.2. - 2 \quad , \quad 3.3.3 \quad , \quad 3.2.4 \quad , \quad 4.3. - 2 \quad , \quad 4. - 4.4 \\ - 24 \quad , \quad - 8 \quad , \quad + 27 \quad , \quad + 24 \quad - 24 \quad , \quad - 64 \end{array}$$

35) Wenn man in einem System von Gleichungen, wie

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$$

die Unbekannten x, y, z etwa dadurch ausscheidet, dass man sie nach und nach von den Coëfficienten befreit und je zwei so modificirte Gleichungen von einander subtrahirt, so erhält man folgende Reihe varianten Producte:

$$\begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 \\ + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 = 0 \end{array}$$

Ausführen lässt sich die Rechnung etwa so:

$$x + \frac{b_1 y + c_1 z}{a_1} = 0$$

$$x + \frac{b_2 y + c_2 z}{a_2} = 0$$

$$x + \frac{b_3 y + c_3 z}{a_3} = 0$$

daraus durch Subtraction

$$\frac{b_1 y + c_1 z}{a_1} - \frac{b_2 y + c_2 z}{a_2} = 0$$

$$\frac{b_2 y + c_2 z}{a_2} - \frac{b_3 y + c_3 z}{a_3} = 0$$

oder

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) y + (a_2 c_1 - a_1 c_2) z = 0$$

$$(a_3 b_2 - a_2 b_3) y + (a_3 c_2 - a_2 c_3) z = 0$$

auch ferner

$$y + \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2} z = 0$$

$$y + \frac{(a_3 c_2 - a_2 c_3)}{a_3 b_2 - a_2 b_3} z = 0$$

durch abermaliges Subtrahiren und Ordnen

$$(a_2 c_1 - a_1 c_2)(a_3 b_2 - a_2 b_3) z - (a_3 c_2 - a_2 c_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1) z = 0$$

woraus abgekürzt

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 = 0$$

folgt.

Auf diese Weise erhält man aus jedem ähnlichen System von Gleichungen *eine geordnete Complexion von varianten Producten aus den Coëfficienten der Unbekannten, welche Determinante genannt wird.*

36) Das Zeichen eines jeden Gliedes der Determinante hängt von dem Zeichen des ersten und von der Anordnung seiner eigenen Elemente ab. Man gelangt zu einem allgemeinen Ausdrucke für

den Zeichenwechsel in einer Determinante, wenn man *die varianten Producte* zunächst nach ihrer Ordnungsnummer anreihet, wie z. B.

$$+) \quad a_1 \quad b_2 \quad c_3 = p_1$$

$$-) \quad a_1 \quad b_3 \quad c_2 = p_2$$

$$-) \quad a_2 \quad b_1 \quad c_3 = p_3$$

$$+) \quad a_2 \quad b_3 \quad c_1 = p_4$$

$$+) \quad a_3 \quad b_1 \quad c_2 = p_5$$

$$-) \quad a_3 \quad b_2 \quad c_1 = p_6$$

und dann jedes Glied mit Hülfe des Coëfficienten (-1) unter Einem *different gegen jedes vorhergehende Glied und jede vorhergehende Differenz der Glieder* setzt. Speciell reiht man also das zweite Product einfach in differenter Lage zum ersten an und das gibt den Zeichenwechsel

$$+ p_1 - p_2, \quad (-1) p_2.$$

Das dritte Product soll im Sinne seiner Faktoren nicht nur der Grösse, sondern auch der Lage nach, different gegen das erste, dann nochmals gegen das zweite und gegen die Differenz der zwei ersten Glieder sein, daher

$$\begin{array}{l} p_1 - p_3 \\ p_2 - p_3 \end{array} \quad p_1 - p_2 - p_3$$

oder unter Einem

$$(-1)(-1)(-1) p_3 = (-1)^3 p_3$$

Für das vierte Glied gilt das Schema

$$\begin{array}{l} p_1 - p_4 \\ p_2 - p_4 \\ p_3 - p_4 \end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 - p_2 - p_4 \\ p_2 - p_3 - p_4 \end{array} \quad (p_1 - p_2) - (p_2 - p_3) - p_4$$

oder unter Einem

$$-1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot p_4 = (-1)^6 p_4$$

u. s. w.

Ein Ueberblick des Ganzen lehrt, dass einem jeden Producte der die differente Lage bestimmende Coëfficient (-1) mit der Ambenzahl der Ordnungsnummer als Exponent vorzusetzen sei. Daher wird das allgemeine Glied einer jeden Determinante oder p_z

mit dem Vorzeichen $(-1)^{\frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}}$ gesetzt. In unserem Beispiele findet man für p_5 das Zeichen

$$(-1)^{\frac{5 \cdot 4}{2}} = (-1)^{10} = +1; \text{ für } p_6$$

$$(-1)^{\frac{6 \cdot 5}{2}} = (-1)^{15} = -1.$$

Uebungsbeispiele:

1. Welches Vorzeichen hat das Product $a_2 b_3 c_4 d_1$, wenn $a_1 b_2 c_3 d_4$ positiv ist?

2. Welches Vorzeichen hat das Product $a_3 b_1 c_2 d_4$, wenn $a_2 b_1 c_3 d_4$ positiv ist?

Anmerkung. Da die Ambenzahlen paarweise gerade und ungerade sind, so wechseln auch die Vorzeichen der Glieder einer Determinante paarweise ab, und es ist daher nur nothwendig, das Zeichen eines Gliedes (des ersten) zu wissen, denn darnach bestimmen sich alle anderen sehr leicht. Man pflegt daher auch nur von *dem Zeichen* der Determinante im Allgemeinen zu reden.

Schreibart der Determinante.

36) Man zeigt die Operation des Determinirens an, wenn man die zu Grunde gelegten Faktorenreihen einklammert. Die Zahl der Determinante soll der Buchstabe Δ ausdrücken. Es ist z. B.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Eine zweite kürzere Methode nimmt bloss die Diagonalreihe oder das erste Glied der Determinante in einer Klammer, wie

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3)$$

Recht brauchbar wird sich im Folgenden eine solche übersichtliche Bezeichnung darstellen, in welcher das variante Product allgemein durch a_{rz} ausgedrückt wird, wobei a die Art der Grössen, r die Folge der ersten und z die permutirende Folge der zweiten Indices angiebt. Das Zeichen des varianten Productes ist dann $(-1)^{\frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}}$, wobei im Exponente die der Folge z entsprechende Ordnungszahl (z) verstanden wird.

Die ganze Determinante ist dann die Summe der möglichen Glieder $(-1)^{\frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}} \cdot a_{rz}$, daher

$$A = \sum (-1)^{\frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}} a_{rz}$$

Einige Haupteigenschaften der Determinante.

37) Die Reihe der ersten Indices ist für eine Determinante als constant anzusehen; würde auch diese nach und nach permutiren, so hätte man so viele einzelne Determinanten als Permutationen in der Folge r möglich sind, während in denselben jede einzelne Determinante von einem anderen Gliede ausgehen würde. Da nun das Zeichen der constanten ersten Complexion das Vorzeichen der ganzen Determinante bestimmt, so hat man in dem obigen Ausdruck noch die aus der Folge der ersten Indices entnommene Bezeichnung $(-1)^{\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}}$ beizufügen. Der allgemeine Ausdruck einer Determinante ist somit

$$A = (-1)^{\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}} \cdot \sum (-1)^{\frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}} a_{rz}$$

oder, weil die ganze Summe das Zeichen ändert, wenn jeder Addend dasselbe thut, auch

$$A = \sum (-1)^{\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}} (-1)^{\frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}} a_{rz} \quad \text{oder}$$

$$A = \sum (-1)^{\frac{r(r-1)}{2} + \frac{z(z-1)}{2}} a_{rz}.$$

Aus diesem Symbol lässt sich unmittelbar entnehmen

1) Dass die Determinante ganz ungeändert bleibt, wenn man r variabel und z constant nimmt, oder umgekehrt, d. h. wenn man die Horizontalreihen vertikal, und die Vertikalreihen horizontal schreibt.

2) Dass die ganze Determinante das Zeichen ändert, wenn man nur zwei Reihen mit einander vertauscht.

Das Gesagte kann man sich anschaulich machen, wenn man jedes Glied der Determinante

$$+ a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

zum Ausgangspunkte einer Determinante nach dem zweiten Index,

der hier durch die Verschiedenheit des Buchstabens angegeben ist, nimmt. Die weiteren Glieder sind

$$\begin{aligned} & - a_1 c_2 b_3 + a_1 c_3 b_2 + a_2 c_1 b_3 - a_2 c_3 b_1 - a_3 c_1 b_2 + a_3 c_2 b_1 \\ & - b_1 a_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + b_2 a_1 c_3 - b_2 a_3 c_1 - b_3 a_1 c_2 + b_3 a_2 c_1 \\ & + b_1 c_2 a_3 - b_1 c_3 a_2 - b_2 c_1 a_3 + b_2 c_3 a_1 + b_3 c_1 a_2 - b_3 c_2 a_1 \\ & + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2 - c_2 a_1 b_3 + c_2 a_3 b_1 + c_3 a_1 b_2 - c_3 a_2 b_1 \\ & - c_1 b_2 a_3 + c_1 b_3 a_2 + c_2 b_1 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2 + c_3 b_2 a_1 \end{aligned}$$

Minoren der Determinante.

38) Wenn man in einer Determinante die Glieder einer Reihe heraushebt, so erhält man in den Klammern wieder Determinanten niedriger Ordnung, welche man Minoren nennt, z. B.

$$\begin{aligned} a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 \\ + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

gibt auch

$$\begin{aligned} a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{aligned}$$

Die Minoren gehen aus den ursprünglich gegebenen Faktoren durch Weglassung der zu einem Elemente gehörigen Horizontal- und Verticalreihe hervor. Man bezeichnet kurz den zu $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \dots$ gehörigen Minor mit $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 \dots$ u. s. w.

Umgekehrt ist dann jede höhere Determinante gleich der Summe der Producte aus den Gliedern einer Reihe in die Minoren, welche man stets in derselben Ordnung (cyklisch) nimmt.

$$\begin{aligned} \text{Es ist} \quad A &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \\ & a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_4 & c_4 & d_4 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} + a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

39) Wenn man an die Stelle eines Systems von Faktoren die denselben entsprechenden Minoren setzt, wie etwa bei

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \quad \text{die Werte} \quad \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$

so nennt man das System der letzteren ein adjungirtes und die Determinante dieses adjungirten Systems eine Reciprok-determinante des ersten Systems.

Beispiel. Die Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ ist } \begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \\ \Delta = 19. \end{array}$$

Hebt man in diesen Ausdrücken nach und nach $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \dots$ heraus und berechnet die Klammerausdrücke so erhält man das adjungirte System

$$\begin{array}{l} A_1 = -3, A_2 = +1, A_3 = +5 \\ B_1 = +14, B_2 = -11, B_3 = +2 \\ C_1 = -2, C_2 = +17, C_3 = -3 \end{array}$$

Berechnet man damit die Reciprok-determinante, so ist diese

$$\begin{array}{r} -3 \cdot -11 \cdot -3 = -99 \\ -3 \cdot 2 \cdot 7 = +42 \\ 1 \cdot 14 \cdot -3 = +42 \\ 1 \cdot 2 \cdot -2 = -4 \\ 5 \cdot 14 \cdot 7 = +490 \\ 5 \cdot -11 \cdot -2 = +110 \\ \hline -213 + 574 \\ \Delta' = 361 = 19 \cdot 19 \end{array}$$

(Im gegebenen Falle ist die adjungirte Determinante gleich dem Quadrat der ursprünglichen.)

Differenz-Determinante.

40) An das in (38) Gesagte schliesst sich unmittelbar folgendes an:

1. Wenn ein Faktor einer Determinante z. B. a_1 einen Zuwachs, der durch da_1 ausgedrückt werden soll, erhält, so nimmt die

Determinante um das Product dieses Zuwachses in den entsprechenden Minor zu.

Schreibt man die Determinante nach der Summe der Minoren auf, wie

$\Delta = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + a_3 \cdot A_3$, oder mit Berücksichtigung des in (37) Gesagten auch

$$\Delta = b_1 \cdot B_1 + b_2 \cdot B_2 + b_3 \cdot B_3$$

$\Delta = c_1 \cdot C_1 + c_2 \cdot C_2 + c_3 \cdot C_3$; und erhöht man a_1 um da_1 oder b_1 um db_1 u. s. w. so geht dieselbe über in

$$\Delta_1 = (a_1 + da_1) A_1 + a_2 \cdot A_2 + a_3 \cdot A_3$$

$$\Delta_1 = a_1 A_1 + da_1 A_1 + a_2 \cdot A_2 + a_3 \cdot A_3$$

und der gesammte Zuwachs ist $da_1 \cdot A_1$.

Beispiel. In (39) ist die Determinante vom Werthe = 19 berechnet worden. Setzt man in den Faktorenreihen an die Stelle des ersten Faktors erster Reihe den Zuwachs 0.5, so dass man im Ganzen den Faktor 1.5 erhält, so wäre die Determinante um

$$0.5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.5 (1.1 - 1.4) = 0.5 \cdot (1 - 4) = 0.5 \cdot -3 = -1.5 \text{ kleiner.}$$

2) Wenn die Faktoren einer Reihe wachsen, so geht die Determinante in zwei andere über, deren erste die Glieder, die zweite ihre Differenzen einordnet. So ist

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} a_1 + da_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + da_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + da_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= + (a_1 + da_1) \cdot b_2 \cdot c_3 \\ &- (a_1 + da_1) \cdot b_3 \cdot c_2 \\ &- (a_2 + da_2) \cdot b_1 \cdot c_3 \\ &+ (a_2 + da_2) \cdot b_3 \cdot c_1 \\ &+ (a_3 + da_3) \cdot b_1 \cdot c_2 \\ &- (a_3 + da_3) \cdot b_2 \cdot c_1 \end{aligned}$$

Löst man die Klammern, so gehen die zwei Determinanten hervor:

$$\begin{aligned} &+ a_1 b_2 c_3 + da_1 \cdot b_2 \cdot c_3 \\ &- a_1 b_3 c_2 - da_1 \cdot b_3 \cdot c_2 \\ &- a_2 b_1 c_3 - da_2 \cdot b_1 \cdot c_3 \\ &+ a_2 b_3 c_1 + da_2 \cdot b_3 \cdot c_1 \\ &+ a_3 b_1 c_2 + da_3 \cdot b_1 \cdot c_2 \\ &- a_3 b_2 c_1 - da_3 \cdot b_2 \cdot c_1 \end{aligned}$$

3) Wenn man die Determinante der reducirten Faktoren

$$\begin{array}{l} a_1, \quad a_1 + d_1 a_1, \quad a_1 + d_2 a_1 \\ a_2, \quad a_2 + d_1 a_2, \quad a_2 + d_2 a_2 \\ a_3, \quad d_3 + d_1 a_3, \quad a_3 + d_2 a_3, \end{array} \text{ worin mit } d_1 \text{ die}$$

erste, mit d_2 die zweite Differenz der Glieder bezeichnet ist nach dem Vorhergehenden bestimmt, so erhält man folgende vier Determinanten:

$$\begin{array}{l} + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 \cdot d_1 a_2 + a_1 a_2 \cdot d_2 a_3 + a_1 \cdot d_1 a_2 \cdot d_2 a_3 \\ - a_1 a_3 a_2 - a_1 a_2 \cdot d_1 a_3 - a_1 a_3 \cdot d_2 a_2 - a_2 \cdot d_1 a_3 \cdot d_2 a_2 \\ - a_2 a_1 a_3 - a_2 a_2 \cdot d_1 a_1 - a_2 a_1 \cdot d_2 a_3 - a_2 \cdot d_1 a_1 \cdot d_2 a_3 \\ + a_2 a_3 a_1 + a_2 a_1 \cdot d_1 a_3 + a_2 a_3 \cdot d_2 a_1 + a_2 \cdot d_1 a_3 \cdot d_2 a_1 \\ + a_3 a_1 a_2 + a_3 a_2 \cdot d_1 a_1 + a_3 a_1 \cdot d_2 a_2 + a_3 \cdot d_1 a_2 \cdot d_2 a_2 \\ - a_3 a_2 a_1 - a_3 a_1 \cdot d_1 a_2 - a_3 a_2 \cdot d_2 a_1 - a_3 \cdot d_1 a_2 \cdot d_2 a_1 \end{array}$$

Hier gilt unmittelbar der Satz: *Wenn man statt der Faktoren einer Reihe ihre Unterscheide setzt, so ist die Determinante der letzteren jener der ersteren gleich*, denn es sind die vorhergehenden Determinanten gleich Null, da sich ihre Glieder gegenseitig auf Null reduciren. Daraus lässt sich ferner schliessen:

1.) Eine Determinante ist gleich Null, wenn zwei Horizontal- oder Vertikalreihen gleich sind; denn es ist ihre Differenz Null, und somit die Differenz- und Originaldeterminante gleich Null.

2.) Eine Determinante wird multiplicirt oder dividirt, wenn man die Glieder einer Reihe multiplicirt oder dividirt; da die Differenz die Glieder selbst wiederholen kann.

3.) Eine Determinante ist gleich Null, wenn eine Faktorreihe das Vielfache einer zweiten gleicher Richtung ist; denn man kann den gemeinschaftlichen Faktor herausheben und es erübrigen dann zwei gleiche Reihen.

Anwendung:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times 3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix};$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

Zusatz. Gehen in Bezug auf ein Element die Haupt- und Minor-Reihen mit gleichen Faktoren horizontal und vertical fort, so heisst die Determinante eine symmetrische wie z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{oder insbesondere}$$

$$\begin{vmatrix} o, & x, & -y, & z \\ -x, & o, & c, & b \\ +y, & -c, & o, & a \\ -z, & -b, & -a, & o \end{vmatrix} = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz$$

4.) Wenn man zu mehreren Faktoren die Reihe ihrer Summen hinzugefügt und dann nach und nach unter Weglassung einer Reihe aus den anderen Determinanten bildet, so sind letztere ganz gleich, sobald man die Summe stets an die Stelle des weggelassenen Faktors setzt.

z. B. Bei den Reihen

$$\begin{array}{lll} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} (a_1 + a_2 + a_3) = s_1 \\ (b_1 + b_2 + b_3) = s_2 \\ (c_1 + c_2 + c_3) = s_3, \text{ ist} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1 + a_2 + a_3) & a_2 & a_3 \\ (b_1 + b_2 + b_3) & b_2 & b_3 \\ (c_1 + c_2 + c_3) & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & a_1 \\ b_1 & s_2 & b_3 \\ c_1 & s_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & s_1 \\ b_1 & b_2 & s_2 \\ c_1 & c_2 & s_3 \end{vmatrix}$$

Denn es lässt sich jede Determinante, in der die Summenreihe vorkommt, in so viele Determinanten auflösen, als Faktorreihen sind. Dann sind aber jene, welche die Faktorreihen wiederholt enthalten, gleich Null. Es resultirt also jedesmal nur die aus den Faktorreihen einzig mögliche Determinante.

Anwendung.

41) Aus dem allen entlehnt man die Lösung eines Systems von Gleichungen des ersten Grades, wie etwa

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = s_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = s_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = s_3$$

nach folgender Regel:

Man bilde die Determinanten zuerst aus den Reihen allein, in denen die Unbekannten vorkommen, und dann mit Hülfe der Summenreihe, die man an die Stelle der einzelnen Faktorreihen setzt, nach und nach die anderen gleichen Determinanten. So erhält man so viele neue Gleichungen, als Unbekannte sind, aus denen sich letztere leicht berechnen lassen.

Anmerkung. Da x, y, z Faktoren der einzelnen Reihen sind, so werden dieselben immer herausgehoben.

Man hat nach Obigem

$$1. \quad x y z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = y z \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$2. \quad x y z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x z \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$3. \quad x y z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

Oder kürzer

$$x = \frac{(s_1 \cdot b_2 \cdot c_3)}{(a_1 \cdot b_2 \cdot c_3)}, \quad y = \frac{(a_1 \cdot s_2 \cdot c_3)}{(a_1 \cdot b_2 \cdot c_3)}, \quad z = \frac{(a_1 \cdot b_2 \cdot s_3)}{(a_1 \cdot b_2 \cdot c_3)}$$

d. h. In einem System von Gleichungen des ersten Grades ist jede Unbekannte gleich dem Quotienten zweier Determinanten, welche aus den Coëfficienten der Unbekannten mit dem Unterschiede gebildet werden, dass die mit der Unbekannten gleichnamige Reihe des Nenners im Zähler durch die Reihe der Gleichungswerte ersetzt wird.

Daher ist für Gleichungen mit drei Unbekannten allgemein

$$x = \frac{s_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + s_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + s_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)}$$

und in dem folgenden Beispiele

$$1. x + 2. y + 3. z = 14$$

$$2. x + 1. y + 1. z = 7$$

$$3. x - 2. y - 2. z = -7$$

$$x = \frac{14. 0 - 2. 7 + 1. 7}{1. 0 - 2. 2 - 1. 3} = \frac{-7}{-7} = + 1.$$

Substituirt man den Werth in zwei Gleichungen, so erhält man:

$$2 y + 3 z = 13$$

$$1. y + 1. z = 5$$

Hier ist wieder

$$y = \frac{13. 1 - 5. 3}{2. 1 - 1. 3} = \frac{-2}{-1} = + 2$$

Durch fortgesetzte Substitution

$$3 z = 13 - 4 = 9$$

$$z = 3$$

welche Werthe jeder von den obigen Gleichungen genügen.

Multiplication der Determinanten und wechselseitige Beziehungen in ihrer Schreibweise.

42) In (36) ist der allgemeine Ausdruck der Determinante durch das Symbol $A = \sum (-1)^{\frac{z(z-1)}{2}} a_{rz}$ gegeben worden.

Hat man eine zweite mit gleicher Gliederzahl, nämlich $A_1 = \sum (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} b_{rz}$, deren allgemeines Glied also $(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} b_{rz}$ ist, so ist das Product dieser beiden Determinanten gewiss die *Summe der Producte eines jeden Gliedes der zweiten in alle Glieder der ersten*. Es hat wieder Determinantenform und jedes Glied desselben ist allgemein darstellbar durch

$$(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \sum (-1)^{\frac{z(z-1)}{2}} b_{rz} \cdot a_{rz}$$

Wenn man nun bedenkt, dass r und z die Faktorenfolge bezeichnet, so ist hieraus für die Multiplication der Determinanten

zu entnehmen, dass man jede Folge der ersten mit jeder Folge der zweiten zu multipliciren ($b_{rz} \cdot a_{rz}$), und die Summe der Producte nach Determinantenart ($\sum (-1)^{\frac{z(z-1)}{2}} \dots$) zu Gliedern der neuen Determinante zusammenzustellen hat.

Wenn die beiden Systeme

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

gegeben sind, so ist das Product ihrer Determinante zunächst:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta_1 = & + m_1 n_2 p_3 (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \quad (\text{nach 38}) \\ & - m_1 n_3 p_2 (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \\ & - m_2 n_1 p_3 (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \\ & + m_2 n_3 p_1 (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \\ & + m_3 n_1 p_2 (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) \\ & - m_3 n_2 p_1 (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 A_2 \\ & \qquad \qquad \qquad + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)) \end{aligned}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\begin{aligned} \Delta\Delta_1 = & + m_1 n_2 p_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - m_1 n_3 p_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ & - m_2 n_1 p_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + m_2 n_3 p_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Allein dasselbe resultirt auch, wenn man die Determinante des Systems

$$\begin{aligned} & (a_1 m_1 + b_1 n_1 + c_1 p_1), (a_1 m_2 + b_1 n_2 + c_1 p_2), \\ & (a_2 m_1 + b_2 n_1 + c_2 p_1), (a_2 m_2 + b_2 n_2 + c_2 p_2), \\ & (a_3 m_1 + b_3 n_1 + c_3 p_1), (a_3 m_2 + b_3 n_2 + c_3 p_2), \\ & \qquad \qquad \qquad (a_1 m_3 + b_1 n_3 + c_1 p_3) \\ & \qquad \qquad \qquad (a_2 m_3 + b_2 n_3 + c_2 p_3) \\ & \qquad \qquad \qquad (a_3 m_3 + b_3 n_3 + c_3 p_3) \end{aligned}$$

nach (40) in ihre 27 einfachen Determinanten zerlegt, deren erste

$$\begin{vmatrix} a_1 m_1 & a_1 m_2 & a_1 m_3 \\ a_2 m_1 & a_2 m_2 & a_2 m_3 \\ a_3 m_1 & a_3 m_2 & a_3 m_3 \end{vmatrix} = m_1 m_2 m_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, und deren jede andere eine Variation der Vertikalreihen in sich enthält. Nun sind diese Variationen der Ordnung nach

$$\begin{array}{llll} 111, & 112, & 113, & 121, & 122, & 123, \\ 211, & 212, & 213, & 221, & 222, & 223 \text{ etc.} \\ 311, & 312, & 313, & 321, & 322, & 323 \end{array}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass, wenn die einzelnen Reihen von ihrem gemeinschaftlichen Faktor befreit werden, indem man denselben nach (40) heraushebt, Determinanten zum Vorschein kommen, welche entweder gleiche oder ungleiche Reihen enthalten, je nachdem die ihnen entsprechenden Variationsordnungen aus gleichen oder ungleichen Elementen zusammengesetzt sind. Zur Verdeutlichung nehmen wir die den Variationsordnungen 121 und 213 entsprechenden Partialdeterminanten

$$(213) \begin{vmatrix} b_1 n_1 & a_1 m_2 & c_1 p_3 \\ b_2 n_1 & a_2 m_2 & c_2 p_3 \\ b_3 n_1 & a_3 m_2 & c_3 p_3 \end{vmatrix} = n_1 m_2 p_3 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(121) \begin{vmatrix} a_1 m_1 & b_1 n_2 & a_1 p_3 \\ a_2 m_1 & b_2 n_2 & a_2 p_3 \\ a_3 m_1 & b_3 n_2 & a_3 p_3 \end{vmatrix} = m_1 n_2 p_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_1 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Da ferner nach (40) alle Determinanten, die zwei gleiche Reihen gleicher Richtung aufweisen, Null sind, so können nur jene erübrigen, welche ein variantes Product, zum Ordnungsindex haben.

Reducirt man die in den Klammern enthaltenen Determinanten so, dass alle mit demselben ersten Gliede anfangen (37), so treten die Determinantenzeichen auf.

Daher ist

$$\Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} (a_1 m_1 + b_1 n_1 + c_1 p_1), & (a_1 m_2 + b_1 n_2 + c_1 p_2), \\ (a_2 m_1 + b_2 n_1 + c_2 p_1), & (a_2 m_2 + b_2 n_2 + c_2 p_2), \\ (a_3 m_1 + b_3 n_1 + c_3 p_1), & (a_3 m_2 + b_3 n_2 + c_3 p_2), \\ & (a_1 m_3 + b_1 n_3 + c_1 p_3), \\ & (a_2 m_3 + b_2 n_3 + c_2 p_3), \\ & (a_3 m_3 + b_3 n_3 + c_3 p_3) \end{vmatrix}$$

Das Product zweier Determinanten ist wieder eine Determinante, deren Elemente die Summe der Producte aus den Faktoren jeder Reihe in die entsprechenden Faktoren des anderen Systems sind.

Anwendung.

43) Sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= s_1 \\ a_2 x + b_2 y &= s_2 \end{aligned}$$

dadurch zu transformiren, dass

$$x = m_1 X + m_2 Y$$

$$y = n_1 X + n_2 Y \text{ gesetzt werden soll, so ist}$$

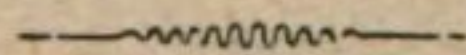
$$a_1 x + b_1 y = s_1 = (a_1 m_1 + b_1 n_1) X + (a_1 m_2 + b_1 n_2) Y$$

$$a_2 x + b_2 y = s_2 = (a_2 m_1 + b_2 n_1) X + (a_2 m_2 + b_2 n_2) Y$$

wobei die Determinante des transformirten Systems

$$\begin{vmatrix} (a_1 m_1 + b_1 n_1), & (a_1 m_2 + b_1 n_2) \\ (a_2 m_1 + b_2 n_1), & (a_2 m_2 + b_2 n_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}.$$

dem Producte beider Determinanten gleich ist. Letztere $(m_1 \ n_2)$ heisst der Modulus der Transformation.



Die ersten drei Transformationen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ x_2 &= x_2 + b_4 y_1 + b_5 y_2 + b_6 y_3 \\ x_3 &= x_3 + b_7 y_1 + b_8 y_2 + b_9 y_3 \end{aligned}$$

Die ersten drei Transformationen sind

Die ersten drei Transformationen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ x_2 &= x_2 + b_4 y_1 + b_5 y_2 + b_6 y_3 \end{aligned}$$

Die ersten drei Transformationen sind

$$x_1 = x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

Die ersten drei Transformationen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ x_2 &= x_2 + b_4 y_1 + b_5 y_2 + b_6 y_3 \end{aligned}$$

Die ersten drei Transformationen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ x_2 &= x_2 + b_4 y_1 + b_5 y_2 + b_6 y_3 \end{aligned}$$

Die ersten drei Transformationen sind

$$x_1 = x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

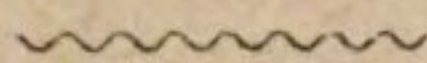
Die ersten drei Transformationen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ x_2 &= x_2 + b_4 y_1 + b_5 y_2 + b_6 y_3 \end{aligned}$$

Die ersten drei Transformationen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ x_2 &= x_2 + b_4 y_1 + b_5 y_2 + b_6 y_3 \end{aligned}$$

Inhalt.



	Seite
Einleitung	5

I. Abtheilung.

Permutationen.

Darstellung derselben	7
Zahl der Permutationen	10
Theilung derselben	12
Faktoriell-Reihen	14

II. Abtheilung.

Combinationen und Variationen.

Darstellung derselben	18
Zahl der Verbindungen	19
Zahl der Verbindungen aus wiederholten Reihen	23
Differenzreihen	26
Ueber die Ordnungszahlen der Combinationen und Variationen	29
Ueber die Maasse einer Zahl	45

III. Abtheilung.

Elemente der Determinanten.

Variante Producte	46
Schreibart der Determinanten	50
Einige Haupteigenschaften derselben	51
Minoren der Determinanten	52
Differenz-Determinanten	53
Anwendung	57
Multiplication der Determinanten und wechselseitige Beziehungen in ihrer Schreibweise	58



Index

I. Alphabetical

1. A. B. C. D. E. F. G. H. I. J. K. L. M. N. O. P. Q. R. S. T. U. V. W. X. Y. Z.

II. Chronological

1. A. B. C. D. E. F. G. H. I. J. K. L. M. N. O. P. Q. R. S. T. U. V. W. X. Y. Z.

III. Geographical

1. A. B. C. D. E. F. G. H. I. J. K. L. M. N. O. P. Q. R. S. T. U. V. W. X. Y. Z.

IV. Miscellaneous

1. A. B. C. D. E. F. G. H. I. J. K. L. M. N. O. P. Q. R. S. T. U. V. W. X. Y. Z.

Mr. Hollnsteiner
k. k. Hof-Buchbinder
in
WIEN
Alte Vorstadt, am Glacis,
Nº 197 im rothen Hause.

Chodníček, Julius

Die Grundzüge der Combinationen und der aus ihnen abgeleiteten Reihen und
Determinanten

Kremsier 1867

Math.p. 73 v

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081591-7